Змістовий модуль1. ***Подвійний інтеграл***

Поняття подвійного інтеграла

При введенні подвійних та потрійних інтегралів ми матимемо справу з обмеженими квадровними областями простору R_2 та з обмеженими кубовними областями простору R_3.

Межа області $\overline{D} \subset R_2$ складається із скінченного числа неперервних кривих, кожна з яких визначається рівнянням виду $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$, де $f(x)$ і $\varphi(y)$ — неперервні функції своїх аргументів на деяких відрізках простору R_2. Це саме стосується й області $\overline{G} \subset R_3$.

Діаметром замкненої області $\overline{D}$ називають найбільшу відстань між двома точками межі цієї області .

Задача про обчислення об'єму циліндричного тіла (бруса).

Розглянемо в системі $Oxyz$ тіло з циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz; основою тіла є область $\overline{D}$, що міститься на площині Oxy, а зверху тіло обмежене поверхнею $z = f(x;y) \geq 0$ (рис. 1.1).

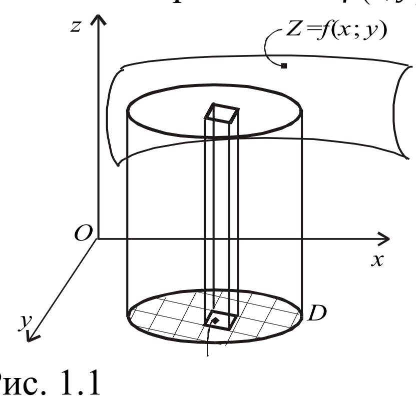


Рис. 1.1

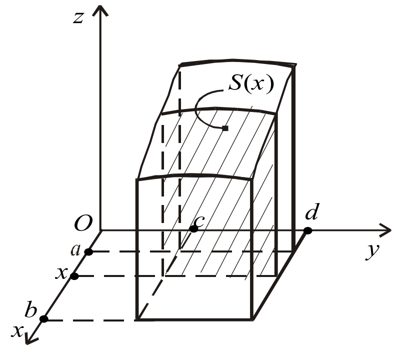


Рис. 1.2

Розіб'ємо основу тіла, тобто область $\overline{D}$, сіткою кривих на n елементарних частинок S_i, площу яких позначимо через ΔS_i. Назвемо це розбиття Т- розбиттям області $\overline{D}$. Виберемо точки $M_i(x_i;y_i) \in S_i$ і побудуємо елементарні циліндричні тіла (бруси), основи яких S_i, а висоти $f(M_i)$. Об'єм елементарного бруса має вигляд $\Delta V_i = f(M_i) \cdot \Delta S_i$. Складемо таку інтегральну суму $V_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta S_i$.

Цю суму називають *подвійною інтегральною сумою* для функції *z=f(x,y),* в області $\overline{D}$, складеною для даного Т- розбиття області $\overline{D}$ і даного вибору точок $M_i(x_i;y_i)$. Зазначимо, що існує нескінченна кількість різних способів Т-розбиття області на частини та нескінченне число виборів точок M_i для одного й того самого Т - розбиття області $\overline{D}$.

Тоді об'єм циліндричного тіла можна знайти у вигляді такої границі:

$$\boxed{V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta S_i},$$

де λ – максимальний діаметр частинки S_i.

Означення. Якщо $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta S_i$ існує та не залежить ні від способу розбиття області $\overline{D}$ на частини, ні від вибору точок M_i, то цю границю називають *подвійним інтегралом від функції* $z = f(x;\ y)$ *по області* $\overline{D}$ і позначають так:

$$\boxed{\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta S_i = \iint\limits_{\overline{D}} f(x;\ y) dS = \iint\limits_{\overline{D}} f(x;\ y) dxdy.}$$

У цьому випадку функції *f(x, y)* називають інтегрованою в області $\overline{D}$; область $\overline{D}$ – областю інтегрування; *x, y*– змінними інтегрування; *dS* (або *dxdy)*– елементом площі.

Отже, подвійний інтеграл є прямим узагальненням поняття звичайного визначеного інтегралу на випадок функції двох змінних.

Задачі про об'єм циліндричного тіла та про масу матеріальної пластинки привели до розгляду границь сум одного й того самого спеціального виду. Побудова цих сум була пов'язана з деякою обмеженою замкненою квадровною областю $\overline{D}$ і з заданою в цій області функцією двох змінних. Можна навести ще ряд задач з фізики і техніки, розв'язання яких приводить до обчислення границь такого виду. Тому виникає необхідність вивчення властивостей цих границь в загальному вигляді, незалежно від тієї чи іншої фізичної або геометричної задачі.

$\boxed{V = \iint\limits_{\overline{D}} f(x; y) dxdy -}$ геометричний зміст подвійного інтеграла.

$\boxed{m = \iint\limits_{\overline{D}} \gamma(x; y) dxdy -}$ механічний зміст подвійного інтеграла, де

$\gamma(x, y) -$густина тіла в точці *(x, y).*

Умови існування подвійного інтеграла.

Нехай функція *z = f(x, y),* обмежена в області $\overline{D}$. Якщо функція *f(x, y),* неперервна в області $\overline{D}$ то m_k і M_k є відповідно її найменше та найбільше значення в області $\overline{D}_k$. Оскільки

$$m_k \le f(x_k; y_k) \le M_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad n-1, \text{ то}$$

$$\underline{S} \le \sigma \le \overline{S}, \text{ де } \quad \underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta s, \qquad \overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta s.$$

Теорема 1 *(критерій інтегрованості функції).* Для того щоб обмежена в області $\overline{D}$ функція *z = f(x, y),* була інтегрованою в цій області, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\left(\underline{S}-\overline{S}\right)=0.$$

Теорема 2 *(достатня умова інтегрованості функції).* Кожна функція *z = f(x, y),* неперервна в замкненій обмеженій квадровній області $\overline{D}$, інтегрована в цій області.

Властивості подвійних інтегралів

Для подвійних інтегралів виконуються такі властивості:

1°. Якщо z = *f(x, y)* = C, C – const, то

$$\iint_{\overline{D}} C dxdy = CS,$$

де S – площа області $\overline{D}$.У випадку якщо C = 1, то

$$\boxed{\iint_{\overline{D}} C dxdy = S.}$$

2°. Якщо функції *f(x, y),* та *φ(x, y),* інтегровані в області $\overline{D}$, то в цій області інтегровані також і функції *f(x, y)*± *φ(x, y)* і справджується рівність

$$\iint_{\overline{D}}\left(f(x;y)\pm\varphi(x;y)\right)dxdy=\iint_{\overline{D}} f(x;y)dxdy\pm\iint_{\overline{D}}\varphi(x;y)dxdy.$$

3°. Якщо функція *f(x, y)* інтегрована в області $\overline{D}$, то в цій області інтегрована й функція C *f(x, y)* , де C – const , причому

$$\iint_{\overline{D}} Cf(x;y)dxdy=C\iint_{\overline{D}} f(x;y)dxdy.$$

4°. (*Адитивність подвійного інтегралу*) Якщо функція *f(x, y)* інтегрована в кожній з областей $\overline{D_1}$ і $\overline{D_2}$, які не мають спільних внутрішніх точок, то вона інтегрована також в області $\overline{D}=\overline{D_1}\cup\overline{D_2}$, причому

$$\iint_{\overline{D}} f(x;y)dxdy=\iint_{\overline{D_1}} f(x;y)dxdy+\iint_{\overline{D_2}} f(x;y)dxdy.$$

5°. Якщо $f(x;y)\ge 0$, де $(x;y)\in\overline{D}$ і функція *f(x, y)* інтегрована в області $\overline{D}$, то

$$\iint_{\overline{D}} f(x;y)dxdy\ge 0.$$

6°. Якщо $f(x;y)\ge\varphi(x;y)$, де $(x;y)\in\overline{D}$ і кожна з функцій *f(x,y)* та *φ(x,y)* інтегрована в області $\overline{D}$**,** то

$$\iint_{\overline{D}} f(x;y)dxdy\ge\iint_{\overline{D}}\varphi(x;y)dxdy.$$

7°. (*Середнє значення функції*). Якщо функція *f(x,y)* неперервна в обмеженій області $\overline{D}$, яка має площу *S*, то існує така точка $(x_0, y_0) \in \overline{D}$, що

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x;y)dxdy = f(x_0, y_0)S.$$

Величину

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{S}\iint\limits_{\overline{D}} f(x, y)dxdy$$

називають *середнім значенням* функції в області $\overline{D}$.

8 °. (*Оцінка подвійного інтегралу*) Якщо функція *f(x,y)* неперервна в обмеженій області $\overline{D}$, яка має площу *S*, то

$$mS \le \iint\limits_{\overline{D}} f(x, y)dxdy \le MS,$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області $\overline{D}$.

Обчислення подвійного інтеграла зведенням до повторного інтеграла

Розглянемо подвійний інтеграл $\iint\limits_{\overline{D}} f(x;y)dxdy,$ як об'єм циліндричного тіла (рис. 1.1).

1. Випадок прямокутної області інтегрування.

Нехай тіло міститься між площинами $x = a$ та $x = в$, а функція $S(x)$ неперервна на відрізку $[a; в]$ і визначає площу перерізу тіла довільною площиною, паралельною площині *Oyz*.

Об'єм такого тіла можна визначити за формулою

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Розглянемо найпростіший випадок, коли в основі циліндричного тіла лежить прямокутник

$\overline{D}$ ={(*x; y*): $a \le x \le b,\ c \le y \le d$ } (рис. 1.2).

Переріз тіла площиною $x = x_0$, $a \le x_0 \le b$, є криволінійна трапеція *ABCD*. Спроектувавши її на площину *Oyz*, дістанемо трапецію $A_1B_1C_1D_1$. Рівняння лінії C_1D_1 на площині *Oyz* має вигляд $z = f(x_0;y),\ c \le y \le d$. Тоді площа криволінійної трапеції $A_1B_1C_1D_1$, а отже, і криволінійної трапеції *ABCD* визначиться за формулою

$$S(x_0) = \int_c^d f(x_0;\ y)dy.$$

Для довільного перерізу циліндричного тіла площиною, паралельною площині *Oyz*, $a \le x \le b$ маємо

$$S(x) = \int_c^d f(x;\ y)dy.$$

Тоді об’єм циліндричного тіла дорівнює

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x;\ y)dy \right) dx$$

де права частина рівності *повторний інтеграл* – послідовно обчислювані однократні визначені інтеграли. У даному повторному інтегралі інтегрування виконується спочатку по змінній *y,* а потім по змінній *x.* Інтеграл по змінній *y* називають *внутрішнім,* а інтеграл по змінній *x* – *зовнішнім.*

Враховуючи геометричний зміст подвійного інтеграла, матимемо

$$\boxed{\iint_{\overline{D}} f(x;\ y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x;\ y)dy \right) dx.}$$

Зауваження. Для прямокутної області інтегрування порядок інтегрування можна міняти місцями, тобто

$$\boxed{\iint_{D} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x;\ y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x;\ y)dx \right) dy.}$$

Отже, обчислення подвійного інтеграла зводиться до послідовного обчислення двох звичайних визначених інтегралів; потрібно тільки пам’ятати, що у внутрішньому інтегралі одна зі змінних при інтегруванні вважається сталою величиною.

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_{\overline{D}} (x^2 + xy - y^2)dxdy$, область $\overline{D}$ = {(*x; y*): $1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$}.

Розв’язання.

$$\int_1^2 dx \int_0^1 (x^2 + xy - y^2)dy = \int_1^2 \left[\left(x^2 y + \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} \right] dx = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{11}{4}.$$

2. Випадок довільної області інтегрування.

Означення. Область $\overline{D}$ називається *правильною* щодо деякої осі координат, якщо будь-яка пряма, паралельна цій осі, перетинає межу області не більш ніж у двох точках.

Наприклад, область $\overline{D}$ – правильна щодо осі *Oy* та неправильна щодо осі *Ox* (рис. 1.3). Звичайно, неправильну область можна розкласти на такі частини, кожна з яких буде правильною щодо певної осі, наприклад, області $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$, $\overline{D}_3$ правильні відносно осей *Ox* та *Oy* (рис. 1.3) $\overline{D_0} = \overline{D_1} \cup \overline{D_2} \cup \overline{D_3}$.

Якщо область $\overline{D}$ правильна щодо осі *Oy* то пряма, паралельна до осі *Oy* перетинає криві φ(*x*) та ψ(*x*) в точках, які називатимемо відповідно *точкою* *входу* в область $\overline{D}$ *точкою виходу* з області $\overline{D}$. Ординати цих точок відповідно рівні $y_{вх} = \varphi(x)$, $y_{вих} = \psi(x)$.

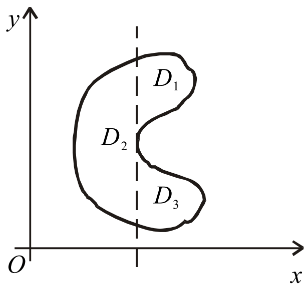


Рис. 1.3

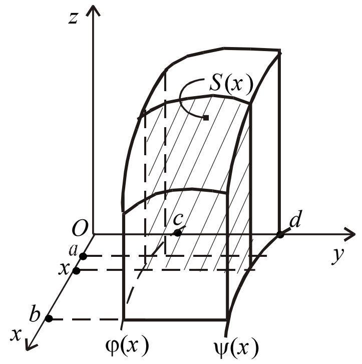


Рис. 1.4

Нехай в основі циліндричного тіла лежить криволінійна трапеція $\overline{D}$. Розглянемо $\overline{D} = \{(x;\ y) \in R^2 \,|\, a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, яка буде правильною відносно осі Oy.

Переріжемо циліндричне тіло площиною, перпендикулярною до осі Ox, площа утвореного перерізу матиме вигляд (рис. 1.4). При фіксованому $x = x_0$ функція $z = f(x;y)$ є функцією лише y, причому y змінюється в межах від $y_{вх} = \varphi(x)$ до $y_{вих} = \psi(x)$

$$S(x_0) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x_0;y)dy\,,$$

а об'єм циліндричного тіла запишеться так:

$$V = \iint_{\overline{D}} f(x,y)dS = \iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;\ y)dy$$

Отже, щоб обчислити подвійний інтеграл у випадку довільної області інтегрування потрібно використати формулу

$$\boxed{\iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;\ y)dy}$$

Зауваження. Зовнішні межі це мінімальне і максимальне значення зовнішньої змінної в області $\overline{D}$. Внутрішні межі – значення внутрішньої змінної на лінії входу в область $\overline{D}$ і лінії виходу з неї.

Зауваження. Щоб поміняти порядок інтегрування у випадку довільної області $\overline{D}$, треба за межами інтегрування відновити (аналітично та геометрично) область $\overline{D}$ і розв'язати задачу зведення подвійного інтеграла до повторного спочатку (змінюючи порядок інтегрування).

Отже, обчислення подвійного інтеграла зводиться до послідовного обчислення двох звичайних визначених інтегралів; потрібно тільки пам'ятати, що у внутрішньому інтегралі одна зі змінних при інтегруванні вважається сталою величиною.

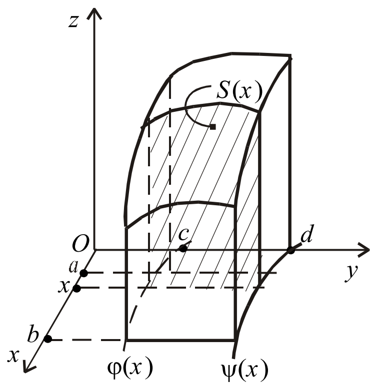


Рис. 1.4

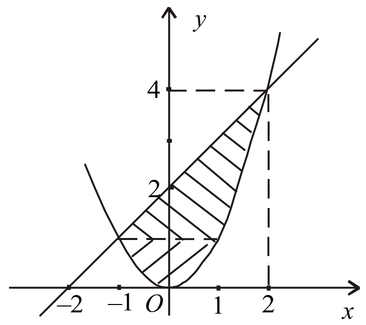


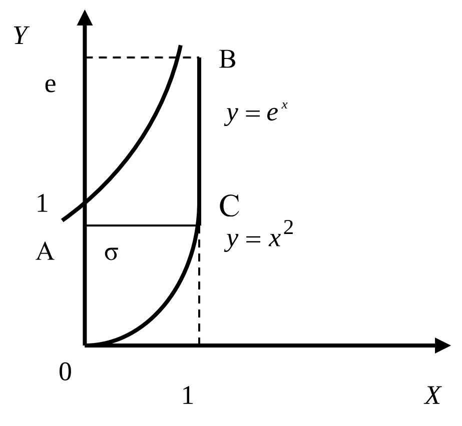
Рис. 1.5

Приклад 2. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{e^x} f(x,y)dy$.

Розв'язання. Перш за все слід побудувати на малюнку область інтегрування (σ). Область σ визначається нерівностями $0 \le x \le 1$ та $x^2 \le y \le e^x$.

Будуемо криві $y = x^2$, $y = e^x$ та пряму $x = 1$.

	Якщо ми хочемо змінити порядок інтегрування і внутрішній інтеграл обчислити по змінній x, а зовнішній інтеграл - по y, то область інтегрування треба розбити на дві: OAC та ABC. Це пояснюється тим, що права частина контуру OCB, що обмежує область σ, складається з двох ліній OC та CB, які визначаються різними рівняннями: (OC) $y = x^2$, (AB) $y = e^x$ (рівняння ліній в цьому випадку повинні бути розв'язані відносно змінної x: $x = \sqrt{y}$, $x = \ln y$):



Якщо ми хочемо змінити порядок інтегрування і внутрішній інтеграл обчислити по змінній x, а зовнішній інтеграл - по y, то область інтегрування треба розбити на дві: OAC та ABC. Це пояснюється тим, що права частина контуру OCB, що обмежує область σ, складається з двох ліній OC та CB, які визначаються різними рівняннями: (OC) $y = x^2$, (AB) $y = e^x$ (рівняння ліній в цьому випадку повинні бути розв‘язані відносно змінної x: $x = \sqrt{y}$, $x = \ln y$):

Відповідь : $J = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x, y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x, y)dx$.

Приклад 3. Обчислити $\iint\limits_D \left(x^2 + y\right)dxdy$, де $D = \left\{(x;\, y) \in R^2 \middle| -1 \le x \le 2,\;\; x^2 \le y \le x + 2\right\}$.

Розв'язання. Область $\overline{D}$ правильна щодо осі *Oy* (рис. 1.5), тому:

$$\iint\limits_D \left(x^2 + y\right)dxdy = \int\limits_{-1}^{2} \left(\int\limits_{x^2}^{x+2} \left(x^2 + y\right)dy \right)dx = \int\limits_{-1}^{2}\left(\left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{\substack{y = x^2}}^{y = x + 2} \right)dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2}\left(x^2(x+2) + \frac{1}{2}(x+2)^2 - \left(x^2 \cdot x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2\right)^2 \right) \right)dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2}\left(-\frac{3}{2}x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + 4 \right)dx = \left(-\frac{3}{10}x^5 + \frac{x^4}{4} + \frac{5}{6}x^3 + x^2 + 2x \right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= -0{,}3 \cdot 32 + 4 + \frac{20}{3} + 4 + 4 - \left(0{,}3 + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + 1 - 2 \right) = 10{,}35.$$

Ця сама область $\overline{D}$ (рис. 1.5) неправильна щодо осі *Ox*, тому якщо змінити порядок інтегрування, то розглядуваний інтеграл можна звести до таких повторних інтегралів:

$$\iint\limits_D \left(x^2 + y\right)dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \left(x^2 + y\right)dx \right)dy + \int\limits_1^4 \left(\int\limits_{y-2}^{\sqrt{y}} \left(x^2 + y\right)dx \right)dy.$$

Приклад 3. Перейти від подвійного інтеграла $\iint\limits_{\overline{D}} f(x;y)dxdy$ до повторного, де область $\overline{D}$ – область обмежена лініями: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \le 1$.

Розв'язання. Зобразимо область інтегрування, яка є еліпсом з великою піввіссю $a = 4$ та малою $b = 2$ (рис.1.6).

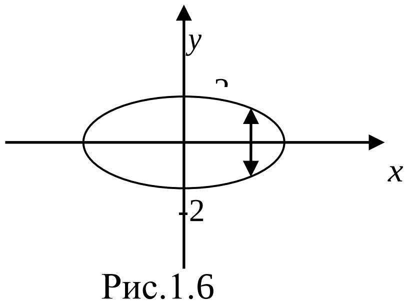


Рис.1.6

Виберемо порядок інтегрування спочатку по змінній y, а потім по змінній x. Для того, щоб встановити межі інтегрування проведемо стрілку, яка паралельна осі Oy. Нижній кінець якої біжить по лінії $y_1 = -2\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$, а верхній по $y_2 = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$.

Змінна x тоді пробігає значення від $x_1 = -4$ до $x_2 = 4$.

Отже, отримаємо інтеграл виду:

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x;y)dxdy = \int\limits_{-4}^{4} dx \int\limits_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}} f(x,y)dy .$$

Подвійний інтеграл в полярних координатах.

Нехай в площині Oxy задана замкнена область $\overline{D}$, а в площині $O'uv$ – $\overline{E}$. Між точками цих замкнених областей встановлено взаємно однозначну відповідність, яка визначається формулами $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$. Тоді

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{E}} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |I(u,v)|\,du\,dv, \text{ де } I(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Функціональний визначник $I(u,v)$ називають визначником Остроградського-Якобі.

При переході від декартових координат до полярних отримаємо

$$\boxed{\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{E}} f(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi)\cdot\rho\,d\varphi\,d\rho}.$$

Отже, щоб перейти в подвійному інтегралі від декартової системи координат до полярної і обчислити його, необхідно:

1) записати межу області $\overline{D}$ у полярних координатах;

2) замінити аргументи x та y підінтегральної функції відповідно на $x = \rho\cos\varphi$ і $y = \rho\sin\varphi$;

3) замінити елемент площі $dxdy$ на $\rho d\rho d\varphi$;

4) розставити межі інтегрування по області $\overline{E}$;

5) обчислити повторний інтеграл.

Зауваження. Перехід в подвійному інтегралі до полярних координат доцільно використовувати в тих випадках, коли підінтегральна функція залежить від $x^2 + y^2$ або від $arctg\frac{y}{x}$, а також у випадках, коли межа області $\overline{D}$ містить дуги кіл та промені, що виходять з початку координат.

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{\overline{D}}(1 - x^2 - y^2)dxdy$, де область $\overline{D}$ обмежена кривими $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \le y \le x$.

Розв'язання. Підінтегральна функція залежить від $x^2 + y^2$, тому перейдемо до полярних координат. Підставимо в нерівність $0 \le y \le x$ $x = \rho\cos\varphi$ і $y = \rho\sin\varphi$. Одержимо

$$0 \le \rho\sin\varphi \le \rho\cos\varphi, \quad 0 \le \sin\varphi \le \cos\varphi, \quad 0 \le tg\varphi \le 1, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.$$

$$\iint\limits_{\overline{D}}\left(1-x^2-y^2\right)dxdy=\left\{\begin{array}{c} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{array}\right\}=\iint\limits_{\overline{E}}\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^2\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\left(1-\rho^2\right)d\left(1-\rho^2\right)\right)d\varphi=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\left(1-\rho^2\right)^2}{2}\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=2}d\varphi==-\frac{1}{4}(-3-1)\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Приклад 2. За допомогою переходу до полярних координат обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{\overline{D}} artg\frac{y}{x}dxdy$ де область $\overline{D}$ – частина кільця $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, обмежена лініями $y=\sqrt{3}x,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція залежить від $arctg\frac{y}{x}$, тому перейдемо до полярних координат. Підставимо в нерівність $\frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}x$ $x=\rho\cos\varphi$ і $y=\rho\sin\varphi$. Одержимо

$$\frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}}\le\rho\sin\varphi\le\sqrt{3}\rho\cos\varphi,\qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\le tg\varphi\le\sqrt{3},\qquad \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$$

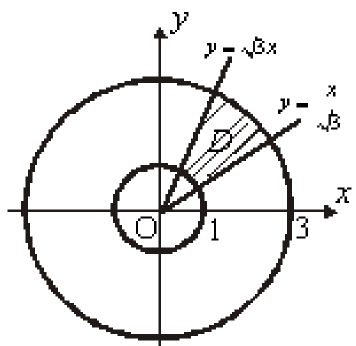


Рис.1.8

$$\iint\limits_{D}arctg\frac{y}{x}dxdy=\left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ I=\rho \end{array}\right|=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_1^3 arctg(tg\varphi)\rho\,d\rho=$$

$$=\left(\alpha=\frac{\pi}{6},\beta=\frac{\pi}{3}\right)=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi\,d\varphi\int\limits_1^3\rho\,d\rho=\frac{\varphi^2}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_1^3=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36}\right)(9-1)=2\cdot\frac{3\pi^2}{36}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулювати задачу про об'єм циліндричного тіла.
2. Що називається подвійним інтегралом від функції *z = f(x, y),* по області $\overline{D}$?
3. Сформулювати достатню умову існування подвійного інтеграла.
4. Перерахувати властивості подвійного інтеграла.
5. Яка область $\overline{D}$ називається правильною в напрямі осі *Oy?* Записати формулу для обчислення подвійного інтеграла по такій області.
6. Записати формулу для обчислення подвійного інтеграла по області $\overline{D}$ у випадку, коли ця область правильна в напрямі осі *Ox*.
7. Записати формули для обчислення подвійного інтеграла через повторні для двох видів областей інтегрування (прямокутної та криволінійної).
8. Сформулювати теорему про заміну змінних у подвійному інтегралі.
9. Чому дорівнює якобіан у полярних координатах?

10. Як обчислюється подвійний інтеграл за допомогою повторного у полярних координатах?

Навчальні завдання

1. Змінити порядок інтегрування в таких інтегралах:

а) $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x;\ y)dy,$ б) $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x;\ y)dy,$ в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x;\ y)dy,$

г) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x;\ y)dy,$ д) $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x;\ y)dy,$ е) $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x;\ y)dy.$

2. Обчислити повторні інтеграли:

а) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 \left(x^2+2y\right)dx,$ б) $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2},$ в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2dy}{1+y^2},$ г) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2dy}{y^2}.$

3. Обчислити подвійні інтеграли зведенням їх до повторних у разі прямокутної області $\overline{D}=\left\{(x;\ y)\in R^2 \middle| a\le x\le b,\ c\le y\le d\right\}.$

а) $\iint\limits_{\overline{D}} (x+y)dxdy;\ \ 0\le x\le 1,\ \ 1\le y\le 2,$ б) $\iint\limits_{\overline{D}} xy(x-y)dxdy;\ \ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2,$

г) $\iint\limits_{\overline{D}} \frac{dxdy}{(x-y)^2};\ \ 1\le x\le 2,\ \ 3\le y\le 4,$ д) $\iint\limits_{\overline{D}} y\cos^2 x\,dxdy;\ \ 0\le x\le 2\pi,\ \ 0\le y\le 1.$

4. Обчислити подвійні інтеграли зведенням їх до повторних у разі області D, що обмежена даними лініями:

а) $\iint\limits_{\overline{D}} xdxdy;\ \ x=0,\ \ y=x^3,\ \ x+y=2,$ б) $\iint\limits_{\overline{D}} \sin(x+y)dxdy;\ \ x=y,\ \ y=0,\ \ x+y=\frac{\pi}{2},$

в) $\iint\limits_{\overline{D}} x^2ydxdy;\ \ y=0,\ \ y=1-x^2,$ г) $\iint\limits_{\overline{D}} \left(1-y^2-x^2\right)dxdy;\ \ x=1,\ \ y=x,\ \ y=2x.$

5. В інтегралі $\iint\limits_D f(x;\ y)dxdy$ перейти до полярних координат ρ та φ $(x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi)$ та визначити відповідні межі інтегрування, якщо область $\overline{D}$ обмежена лініями:

а) $x^2+y^2=R^2;$ б) $x^2+y^2=4x;\ \ x^2+y^2=8x;\ \ y=x;\ \ y=2x.$

6. За допомогою переходу до полярних координат обчислити такі подвійні інтеграли:

а) $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln\left(x^2+y^2+1\right)dy,$ б) $\iint\limits_{\overline{D}} (2-2x-3y)dxdy;\ \ \overline{D}=\left\{(x;\ y)\in R^2 \middle| x^2+y^2\le 4\right\}.$

Завдання для самостійної роботи

7. Змінити порядок інтегрування в таких інтегралах:

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x;\ y)dy,$ б) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x;\ y)dy.$

8. Обчислити такі повторні інтеграли:

а) $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_0^1 4\left(x^3 + 2y^2\right)dx,$ б) $\int\limits_{-2}^{4} dx \int\limits^{2} \frac{dy}{x^2 - y^2}.$

9. Обчислити подвійні інтеграли зведенням їх до повторних у разі прямокутної області $\overline{D} = \left\{(x;\ y) \in R^2 \,\middle|\, a \le x \le b,\ c \le y \le d\right\}.$

а) $\iint\limits_{\overline{D}} (\sqrt{x}y^3)dxdy$, $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$; б) $\iint\limits_{\overline{D}} (x^2 - 4y)dxdy$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 4$.

10. Обчислити подвійні інтеграли зведенням їх до повторних у разі області , що обмежена даними лініями:

а) $\iint\limits_{\overline{D}} \left(1 + 2x + 2y\right)dxdy;\quad y = x,\quad y = 0,\quad x + y = 1,$

б) $\iint\limits_{\overline{D}} \left(4 - y\right)dxdy;\quad y = 1,\quad 4y = x^2,\quad x \ge 0.$

11. В інтегралі $\iint\limits_{D} f(x;\ y)dxdy$ перейти до полярних координат ρ та φ $\left(x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi\right)$ та визначити відповідні межі інтегрування, якщо область $\overline{D}$ обмежена лініями:

а) $y = x;\ \ y = 0;\ \ x = 1;$ б) $x^2 + y^2 = 4;\ \ x + y \ge 2.$

12. За допомогою переходу до полярних координат обчислити такі подвійні інтеграли:

а) $\iint\limits_{D} \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}dxdy;\ \ \overline{D} = \left\{(x;\ y) \in R^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0,\ x \ge 0\right\}.$

б) $\iint\limits_{D} \sqrt{9 - x^2 - y^2}dxdy;\ \ \overline{D} = \left\{(x;\ y) \in R^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 3x\right\}.$

Змістовий модуль2. ***Потрійний інтеграл***

Поняття потрійного інтеграла

Схема побудови потрійного інтегралу така сама, як і звичайного визначеного інтеграла та подвійного інтеграла.

Розглянемо в просторі R_3 деяку замкнену область $\overline{G}$. Нехай в області $\overline{G}$ і на її границі визначена деяка неперервна функція $u = f(x, y, z)$. Розіб'ємо просторову область $\overline{G}$ довільним чином на n частин: $\overline{G} = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} \overline{G}_k$.

Об'єми цих частин позначимо через ΔV_k. В кожній області $\overline{G}_k$ виберемо довільну точку $P_k(x_k, y_k, z_k)$і утворимо інтегральну суму

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k.$$

Оскільки функція $f(x,y,z,)$ є неперервною в області $\overline{G},$ а сама область $\overline{G}$ є замкненою і обмеженою, то існує скінченна границя інтегральної суми незалежно від способу розбиття області $\overline{G}$ на частини $\overline{G}_k$ і від вибору точок $P_k(x_k, y_k, z_k)$ при умові, що максимальний діаметр області $\overline{G}_k$ прямує до 0 то ця границя називається *потрійним інтегралом* від функції $f(x,y,z)$ по області $\overline{G}$, тобто;

$$\boxed{\lim_{\substack{\max\, diam G_k \to 0 \\ 1\le k\le n}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = \iiint_{\overline{G}} f(x, y, z,)dV}$$

Елементарний об'єм $dV = dxdydz$, тому

$$\boxed{\iiint_{\overline{G}} f(x, y, z,)dV = \iiint_{\overline{G}} f(x, y, z,)dxdydz.}$$

Властивості потрійних інтегралів

1°. Якщо $f(x,y,z,) = C$, С – стала величина, то $\iiint\limits_{\overline{G}} Cdxdydz = CV$,

де V - об'єм області $\overline{G}$. Зокрема при $C = 1$ дістаємо:

$\boxed{\iiint\limits_{\overline{G}} dxdydz = V}$ - це геометричне тлумачення потрійного інтеграла.

Але якщо функція $f(x,y,z,) \neq 1$, то потрійний інтеграл не має геометричного тлумачення оскільки не має геометричного чотиривимірної системи координат.

2°. Потрійний інтеграл від суми кількох інтегрованих функцій дорівнює сумі потрійних інтегралів від доданків:

$$\iiint_{\overline{G}} \left(f(x, y, z,) \pm \varphi(x, y, z)\right)dxdydz = \iiint_{\overline{G}} f(x, y, z,)dxdydz \pm \iiint_{\overline{G}} \varphi(x, y, z)dxdydz$$

3°.(*Адитивність потрійного інтегралу*)

$$\iiint\limits_{\overline{G}} f(x,y,z,)dxdydz = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z,)dxdydz + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z,)dxdydz \quad \overline{G} = \overline{G}_1 \bigcup \overline{G}_2$$

4°. Якщо $f(x,y,z,) \geq 0$, то $\iiint\limits_{\overline{G}} f(x,y,z,)dxdydz \geq 0$

Оскільки $f(x,y,z,) \leq |f(x,y,z,)|$, то

$$\left|\iiint\limits_{\overline{G}} f(x,y,z,)dxdydz\right| \leq \iiint\limits_{\overline{G}} |f(x,y,z,)|dxdydz$$

5°. (*Теорема про середнє значення*) Якщо функція $f(x,y,z,)$ є неперервною в кожній точці області $\overline{G}$, то існує така точка $(x_0, y_0, z_0) \in \overline{G}$, що

$$\iiint\limits_{\overline{G}} f(x,y,z,)dxdydz = f(x_0, y_0, z_0)V,$$

де V – об'єм області $\overline{G}$.

Величину

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V}\iiint\limits_{\overline{G}} f(x,y,z,)dxdydz$$

називають *середнім значенням* функції $f(x,y,z,)$ в області $\overline{G}$.

Обчислення потрійного інтеграла

Як і у випадку подвійних інтегралів, обчислення потрійного інтеграла зводяться до обчислення повторних, тобто до інтегрування по кожній змінній окремо.

Нехай $\overline{G}$ деяка просторова область, що обмежена замкненою поверхнею S. Область називають *правильною* за напрямом осі Oz, якщо вона має такі властивості:

1) будь-яка пряма, що паралельна осі Oz перетинає поверхню S не більше ніж у двох точках;

2) уся область $\overline{G}$ проектується на площину xOy в правильну двовимірну область $\overline{D}$.

Аналогічно визначаються правильні тривимірні області за напрямами осей *Ox, Oy.*

Область $\overline{G}$ є *правильною* тривимірною областю, якщо вона правильна за напрямами усіх трьох осей.

Правильними тривимірними областями є еліпсоїди, піраміди, призми та інші тіла.

Для таких областей обчислення потрійного інтеграла зводиться до обчислення одного однократного і одного подвійного, або трьох однократних.

$$\boxed{\iiint\limits_{\overline{G}} f(x,y,z,)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{Z_1(x_1,y_1)_1}^{Z_2(x_2y_2)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{Z_1(x,y)}^{Z_1(x,y)} f(x,y,z)dz.}$$

Зокрема, якщо область інтегрування є паралелепіпед:

$$\boxed{\iiint\limits_{\bar{G}} f(x,y,z,)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_k^l f(x,y,z)dz}$$

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{\bar{G}} (x+y+z)dxdydz$ де $\overline{G}$ – область, обмежена площинами $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

Розв'язання.

Оскільки область G – куб: $\overline{G} = \left\{(x;\ y, z) \in R^3 \middle| 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\right\}$, то за формулою

$$\iiint\limits_{\bar{G}} f(x,y,z,)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_k^l f(x,y,z)dz$$

маємо

$$\iiint\limits_{G} (x+y+z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z)dz = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 dy \right) =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dy = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right)\Bigg|_0^1 dx = \int_0^1 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{G} zdxdydz$, якщо область $\overline{G}$ – обмежена площинами $x = 0$, , $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z - 1 = 0$ (рис. 2.1).

Розв'язання.

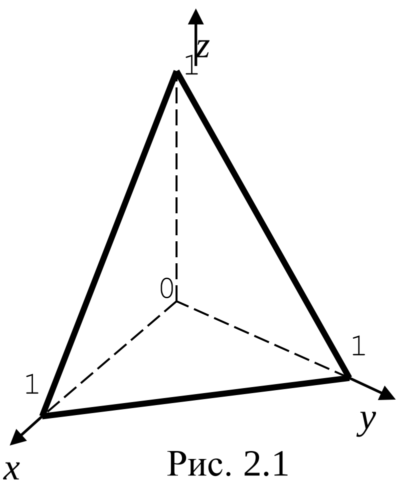


Рис. 2.1

Область $\overline{G}$ проектується на площину xOy в трикутник $\overline{D} = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}$.

Оскільки z змінюється від 0 до $z = 1 - x - y$, то використовуючи формулу

$$\iiint\limits_{\bar{G}} f(x,y,z,)dxdydz =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{Z_1(x_1,y_1)_1}^{Z_2(x_2y_2)} f(x,y,z)dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{Z_1(x,y)}^{Z_1(x,y)} f(x,y,z)dz$$

маємо

$$\iiint_G zdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} zdz = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 d(1-x-y) = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3 dx = -\frac{1}{24}(1-x)\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

Приклад 3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_G xyzdxdydz$ якщо область $\overline{G}$ – обмежена площинами $x = 0$, , $y = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (рис. 2.2).

Розв'язання.

Область $\overline{G}$ проектується на площину xOy в чверть круга $x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$.

Змінна z змінюється від 0 до $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

$$\iiint_G xyzdxdydz = \iint_{D_{xy}} xydxdy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz = \int_0^2 xdx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} ydy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int_0^2 xdx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\left(4 - x^2 - y^2\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x\left(2y^2 - \frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{x^5}{4} - 2x^3 + 4x\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{24} - \frac{x^4}{2} + 2x^2\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Потрійний інтеграл в циліндричних координатах

Циліндричними координатами точки $M(x, y, z)$ через числа ρ, φ, z , де ρ і φ - полярні координати.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi & 0 \le \varphi \prec 2\pi \\ y = \rho\sin\varphi & 0 \le \rho \prec +\infty \\ z = z & -\infty \prec z \prec +\infty \end{cases}$$

$$\iiint_{\bar{G}} f(x, y, z,)dxdydz = \iiint_{\bar{V}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)|j|d\rho d\varphi dz$$

Рис.2.2

де $|j|$ - модуль Якобіана перетворене, який має вигляд:

$$j = \begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho & z'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho$$

Тоді потрійний інтеграл в циліндричних координатах:

$$\boxed{\iiint_{\bar{G}} f(x, y, z,)dxdydz = \iiint_{\bar{V}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz}$$

Добуток $\rho d\rho d\varphi dz$ визначає елементарний об'єм в циліндричних координатах.

Потрійний інтеграл в сферичній системі координат

Сферичними координатами точки $M(x,y,z)$ називаються числа ρ,φ,θ.

Де θ – кут між віссю Oz і радіус-вектором OM точки M;

ρ – довжина цього радіус-вектора, тобто відстань від точки M до початку координат;

φ – кут між проекцією OB радіус-вектора OM на площину Oxy і віссю Ox.

$$OB = \rho \sin\theta$$

$$\begin{cases} x = OB\cos\varphi = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = OB\sin\varphi = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

Рис. 2.3

$$0 \le \theta \le \pi$$
$$0 \le \varphi < 2\pi$$
$$0 \le \rho < +\infty$$

Елементарний об'єм в прямокутній системі координат і в сферичній системі координат пов'язані співвідношенням $dxdydz = |J| d\rho d\varphi d\theta$ де Якобіан перетворення

$$J(\rho,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho & z'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} - \rho\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta\left(-\rho^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - \rho^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\right) - \rho\sin\theta\left(\rho\sin^2\cos^2 + \rho\sin^2\theta\sin^2\varphi\right) =$$

$$= -\rho^2\sin\theta\cos^2\theta - \rho^2\sin^3\theta = -\rho^2\sin\theta\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = -\rho^2\sin\theta$$

Оскільки елементарний об'єм $dxdydz = |J(\rho,\varphi,\theta)| d\rho d\varphi d\theta = \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$, то

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta}$$

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл

$\iiint\limits_G \left(1 + \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)^5 dxdydz$, де $\overline{G}$-верхня частина кулі

$$x^2+y^2+z^2 \le 1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\theta = \rho^2.$$

Розв'язання.

$$\iiint\limits_G \left(1 + \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)^5 dxdydz = \iiint\limits_V \left(1 + \left(\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)^5 \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(1+\rho^3\right)^5 \rho^2 d\rho = -\frac{1}{3}\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\Big|_0^{2\pi} \frac{\left(1+\rho^3\right)^6}{6}\Bigg|_0^1 = .\frac{1}{3}2\pi\frac{1}{6}\left(2^6-1\right) = \frac{\pi}{9}63 = 7\pi.$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулювати означення потрійного інтеграла.
2. Сформулювати достатню умову існування потрійного інтеграла.
3. Сформулювати властивості потрійного інтеграла.
4. Як обчислюється потрійний інтеграл в прямокутних координатах?
5. Як обчислюється потрійний інтеграл з циліндричних координатах? Навести приклад області, для якої межі інтегрування в циліндричних координатах постійні.
6. Як обчислюється потрійний інтеграл в сферичних координатах? Для якої області межі інтегрування в сферичних координатах сталі?

Навчальні завдання

13. Обчислити повторні інтеграли:

а) $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z)dz;$ б) $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y (x+y+z)dz.$

14. Обчислити потрійні інтеграли, якщо область інтегрування G обмежена даними поверхнями:

а) $\iiint_G (x^2+y^2+z^2)dxdydz,$ G – прямокутний паралелепіпед $0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 6, \quad 0 \le z \le 8.$

б) $\iiint_G (2x+y^2-1)dxdydz,$ G – область, обмежена поверхнями $x^2+y^2=z, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=2.$

в) $\iiint_G (x-y)dxdydz,$ G – піраміда, утворена площинами $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y+z=1.$

15. Обчислити потрійні інтеграли, перейшовши до циліндричних або сферичних координат:

а) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^2 z\sqrt{x^2+y^2}dz;$ б) $\iiint_G (x^2+z^2)dxdydz,$ G – область, обмежена параболоїдом $2y = x^2+z^2$ і площиною y=2;

в) $\iiint_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,$ G – область, обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=4.$

Завдання для самостійної роботи

16. Обчислити повторні інтеграли:

а) $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (xy+z)dz;$ б) $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y (x^2+5y+z)dz.$

17. Обчислити потрійні інтеграли, якщо область G інтегрування обмежена даними поверхнями:

а) $\iiint\limits_G (x^2+y^2)dxdydz,$ G – куб, $0 \le x \le 2,\quad 0 \le y \le 2,\quad 0 \le z \le 2.$

б) $\iiint\limits_G (x-y)dxdydz,$ G – піраміда, утворена площинами $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+2y+3z=1.$

18. Обчислити потрійні інтеграли, перейшовши до циліндричних або сферичних координат:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{2y-y^2}} dz \int\limits_0^1 y\sqrt{x^2+y^2}dy;$ б) $\iiint\limits_G (x^2+z^2)dxdydz,$ G – область, обмежена нерівностями $4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\quad z \ge 0.$

Змістовий модуль3. ***Застосування подвійних та потрійних інтегралів до задач геометрії і механіки.***

1. Площа плоскої фігури

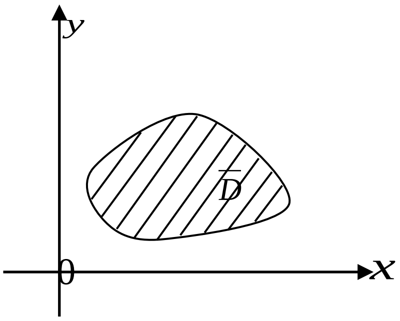


Рис. 3.1

$$\boxed{S=\iint\limits_{\overline{D}} dx\,dy}$$

У полярній системі координат ρ і φ формула має вигляд

$$\boxed{S=\iint\limits_{\overline{E}} \rho d\rho d\varphi.}$$

Приклад 1. Записати подвійний інтеграл і обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y=\dfrac{9}{x}$, $y=x$, $x=9$.

Розв'язання. Зобразимо дану фігуру (рис. 3.2). Знайдемо межі інтегрування:

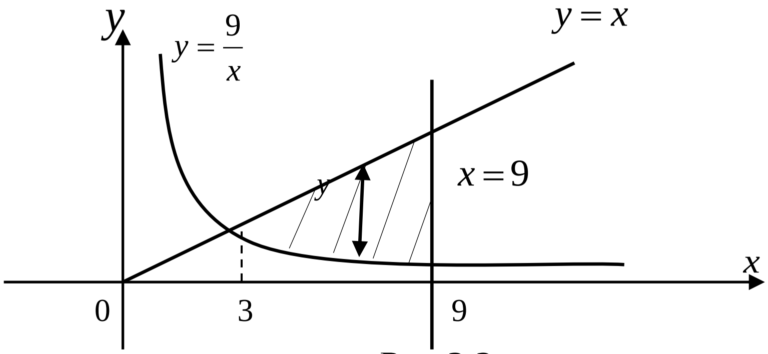


Рис.3.2

$$\begin{cases} y=\dfrac{9}{x}, \\ y=x, \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{9}{x}, \\ y=x, \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=3, \end{cases}$$

або $\begin{cases} x=-3, \\ y=-3. \end{cases}$

Точці перетину графіків $y=\dfrac{9}{x}$ та $y=x$ відповідають координати $(3;3)$. Виберемо порядок інтегрування і розставимо межі інтегрування. Спочатку будемо інтегрувати по змінній y.

Для цього проведемо стрілку паралельну осі Oy. Тоді з малюнка отримаємо: $y_1=\dfrac{9}{x}$, $y_2=x$, $x_1=3$, $x_2=9$.

$$S=\iint\limits_{\overline{D}} dx\,dy=\int\limits_3^9 dx\int\limits_{\frac{9}{x}}^{x} dy=\int\limits_3^9 y\Big|_{\frac{9}{x}}^{x} dx=\int\limits_3^9\left(x-\frac{9}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-9\ln x\right)\Bigg|_3^9=\frac{81}{2}-9\ln 9-\left(\frac{9}{2}-9\ln 3\right)=$$

$=36-9\ln 3$ (кв.од.).

2. Об'єм циліндричного тіла.

Під циліндричним тілом розуміють тіло, яке обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y)$, знизу – площиною Oxy, бічна поверхня якого є циліндричною з твірною паралельною вісі Oz (рис. 3.3).

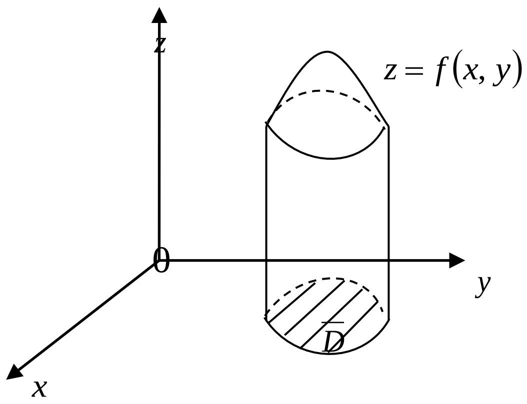


Рис.3.3

Фігуру $\overline{D}$, яка лежить в площині Oxy, називають основою циліндричного тіла. Тоді

$$V = \iint\limits_{\overline{D}} f(x, y)\,dx\,dy.$$

$$V = \iiint\limits_{\overline{G}} dxdydz.$$

$$V = \iiint\limits_{\overline{G'}} \rho d\rho d\varphi dz$$

$$V = \iiint\limits_{\overline{G''}} \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$$

Приклад 2. Обчислити об'єм тіла, фігури, обмеженого поверхнями $y = x^2$, $y = 1$, $x + y + z = 4$, $z = 0$ (рис. 3.3).

Розв'язання. Задане тіло є параболічним циліндром $y = x^2$, обмеженим зверху частиною площини $z = 4 - x - y$, а знизу частиною площини Oxy, вміщеної між параболою $y = x^2$ та прямою $y = 1$ (область $\overline{D}$ на рисунку заштрихована).

Рис. 3.4

За формулою $V = \iint\limits_{\overline{D}} f(x, y)\,dx\,dy$ дістаємо

$$V = \iint\limits_{\overline{D}} (4 - x - y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (4 - x - y)dx =$$

$$= \int_0^1 \left((4 - y)x - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dy = 2\int_0^1 (4 - x)\sqrt{y}dy = \frac{68}{15}.$$

Приклад 3. Користуючись потрійним інтегралом обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = 4 - x^2$, $y = 5$, $y = 0$, $z = 2$.

Розв'язання. Поверхня, яка обмежує об'єм зверху, це поверхня – параболічний циліндр з твірними паралельними вісі *OY*: $z = 4 - x^2$, знизу - $z = 2$, з боків: $y = 5$, $y = 0$.

Зобразимо цю поверхню, та її проекцію на площину *xOy*.

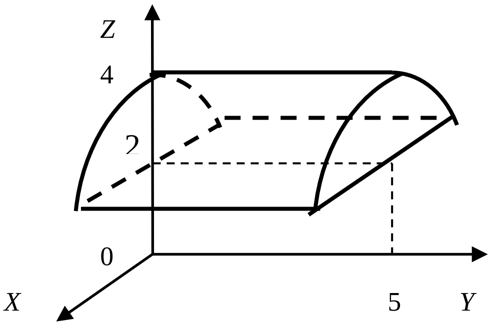


Рис. 3.5

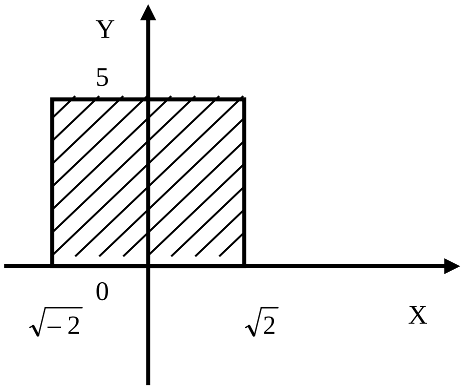


Рис. 3.6

У формулу для обчислення об‘єму V= $\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz$ підставимо границі інтегрування, враховуючи симетрію тіла відносно площини yOz.

$$\frac{V}{2} = \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{5} dy \int\limits_{2}^{4-x^2} dz = \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{5} (z\Big|_{2}^{4-x^2})dy = \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{5} (2 - x^2)dy = \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} ((2y - x^2 y)\Big|_{0}^{5})dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} (10 - 5x^2)dx = (10x - 5\frac{x^3}{3})\Big|_{0}^{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{3}.$$

3. Площа поверхні.

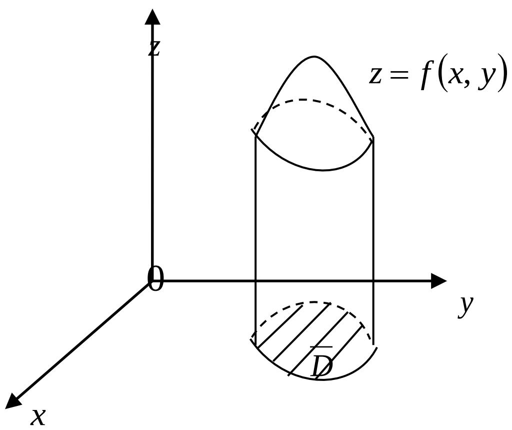


Рис. 3.7

Поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, причому $\overline{D}$ є проекцією поверхні на площину Oxy. Площа P поверхні, яка проектується на площину Oxy в область D і задається функцією $z = f(x, y) \geq 0$ $\left(f, f_k', \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ - неперервні функції в області D), знаходиться за формулою

$$\boxed{P = \iint\limits_{\overline{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy}$$

Приклад 4. Обчислити площу частини поверхні $x^2 + y^2 = 2z$ що вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

Розв'язання.

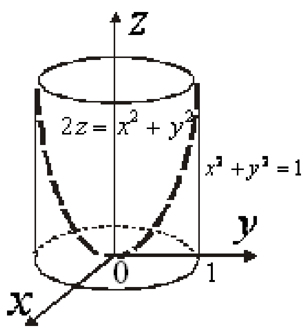


Рис. 3.8

Дана поверхня – параболоїд (рис.3.8). Обчислимо частинні похідні функції $\frac{x^2+y^2}{2}=z$

$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)'_x=x,\quad \frac{df}{dy}=\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)'_y=y.$$

$$P=\iint\limits_{\overline{D}}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dy=$$

Область $\overline{D}$ інтегрування є круг з радіусом, що дорівнює 1. Тоді маємо, перейшовши в подвійному інтегралі до полярних координат:

$$=\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)}{3}.$$

Застосування подвійних та потрійних інтегралів до задач з механіки.

Розглянемо задачу про визначення маси матеріального неоднорідного тіла, статичних моментів та моментів інерції.

1) Якщо пластинка займає область $\overline{D}$ площини xOy і має змінну поверхневу густину $\gamma=\gamma(x,y)\left[\frac{кг}{м^3}\right]$.

То маса пластинки дорівнює:

$$m=\iiint\limits_{\overline{D}}\gamma(x,y)dxdy.$$

Статичні моменти :

$$M_x=\iint\limits_{D}y\gamma(x,y)dxdy,\qquad M_y=\iint\limits_{D}x\gamma(x,y)dxdy.$$

Координати x_c і y_c центра мас пластинки знаходять за формулами:

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\iint\limits_{D}x\gamma(x,y)dxdy,}{\iint\limits_{D}\gamma(x,y)dxdy,},\qquad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\iint\limits_{D}y\gamma(x,y)dxdy,}{\iint\limits_{D}\gamma(x,y)dxdy,}.$$

Моменти інерції I_x ,I_y, I_o пластинки відносно осей координат $xO,\ Oy$ і початку координат відповідно дорівнюють:

$$I_x=\iint\limits_{D}y^2\gamma(x,y)dxdy,\qquad I_y=\iint\limits_{D}x^2\gamma(x,y)dxdy,$$

$$I_o=I_x+I_y=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\gamma(x,y)dxdy.$$

2) Нехай маса розділена по замкненій області $\overline{G} \subset R_3$ з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)\left[\frac{кг}{м^3}\right]$, де $\gamma(x, y, z)$ - неперервна функція в $\overline{G}$.

Тоді маса всього тіла:

$$m = \iiint\limits_{\overline{D}} \gamma(x, y, z) dxdydz$$

$$m = \iiint\limits_{\overline{G}} \gamma(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz$$ - маса в циліндричних координатах.

Аналогічно знайдемо статичні моменти M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} неоднорідного тіла $\overline{G}$ відносно координатних площин відповідно O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}

$(dM_{xy} = zd_m)$ $\quad M_{xy} = \iiint\limits_{\overline{G}} z \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$

$(dM_{xz} = yd_m)$ $\quad M_{xz} = \iiint\limits_{\overline{G}} y \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$

$(dM_{yz} = xd_m)$ $\quad M_{yz} = \iiint\limits_{\overline{G}} x \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$

Координати x_c і y_c центра мас пластинки знаходять за формулами:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint\limits_G x\gamma(x, y, z) dxdydz}{\iint\limits_G \gamma(x, y, z) dxdydz,}, \qquad y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint\limits_G y\gamma(x, y, z) dxdydz}{\iint\limits_G \gamma(x, y, z) dxdydz,},$$

$$z_c = \frac{M_{yx}}{m} = \frac{\iiint\limits_G z\gamma(x, y, z) dxdydz}{\iint\limits_G \gamma(x, y, z) dxdydz,}.$$

Моменти інерції I_x ,I_y, I_o пластинки відносно осей координат *xO, Oy* і початку координат відповідно дорівнюють:

$$I_x = \iiint\limits_{\overline{G}} (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dxdydz,$$

$$I_y = \iiint\limits_{\overline{G}} (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_{\overline{G}} (y^2 + x^2) \gamma(x, y, z) dxdydz.$$

Якщо тіло однорідне, то вважають, що $\gamma = \gamma(x, y, z) = 1.$

Приклад 5. Визначити координати центру тяжіння сектора однорідного круга радіусу *a* з центральним кутом *α*, розташованого симетрично відносно осі *Ox* (рис. 3.10).

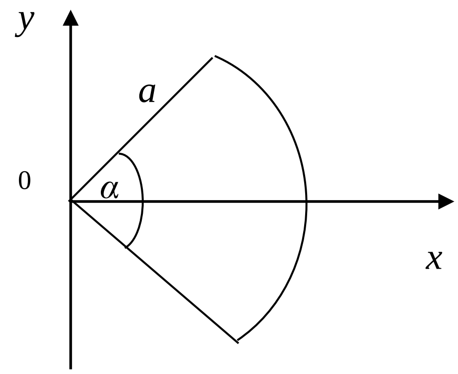


Рис.3.10

Розв'язання.

Задачу зручно розв'язувати в полярних координатах. В формулах вигідно перейти до полярних координат, зробивши в них такі заміни:

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, а елемент площі $dx\,dy$ повинен бути замінений на $\rho d\rho d\varphi$.

Тоді,

$$x_c = \frac{\iint\limits_{\sigma} \rho^2 \cos\varphi d\rho d\varphi}{\iint\limits_{\sigma} \rho d\rho d\varphi}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi}{\iint\limits_{(\sigma)} \rho d\rho d\varphi}.$$

Нам слід вирахувати тільки x_c , так як із симетрії фігури відносно осі Ox слідує, що $y_c=0$.

В області (σ) змінні ρ та φ змінюються в таких межах: змінна ρ від 0 до a; змінна φ від $-\frac{\alpha}{2}$ до $+\frac{\alpha}{2}$.

Тому чисельник дробу у виразові для x_c

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \cos\varphi d\rho d\varphi = \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^a \rho^2 d\rho.$$

Враховуючи, що $\int\limits_0^a \rho^2 d\rho. = \frac{\grave{a}^3}{3}$, отримуємо

$$I = \frac{a^3}{3} \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos\varphi d\varphi = \frac{a^3}{3} (\sin\varphi) \Bigg|_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{3} a^3 \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Знаменник дробу у формулі для x_c

$$I_1 = \iint\limits_{(\sigma)} \rho d\rho d\varphi = \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} d\varphi \int\limits_0^a \rho d\rho = \frac{1}{2} a^2 \alpha$$

(Ми могли б I_1 не вираховувати, так як із геометрії відомо, що площа кругового сектора радіуса a з центральним кутом α дорівнює половині добутку квадрата радіуса на центральний кут, виражений у радіанах). Отже,

$$x_c = \frac{\frac{2}{3} a^3 \sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2} a^2 \alpha} = \frac{2}{3} a \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \,см.$$

Запитання для самоперевірки

1. Записати формули для обчислення об'єму циліндричного тіла, площі плоскої фігури та площі поверхні.

2. Записати формули для обчислення маси, статистичних моментів та моментів інерції пластини.

Навчальні завдання

19. За допомогою подвійних інтегралів обчислити площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = x^2;\ \ y = x + 2;$ б) $y = \sqrt{x};\ \ y = 2\sqrt{x};\ \ x = 4;$ в) $9x^2 + 4y^2 = 36.$

20. Користуючись потрійним інтегралом, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $z = x^2 + y^2,\quad z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x^2,\quad y = x;$

б) $z = \ln(x + y),\quad z = \ln(6 - x),\quad x = 0,\quad x + y = 2,\quad x - y = 2$.

21. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $z = x\ ,\quad x^2 + y^2 = 9,\ \mathrm{z} = 0;$ б) $z = x^2 - y^2,\quad \mathrm{z} = 0,\quad \mathrm{x} = 3.$

22. Знайти масу квадратної пластинки із стороною $2a$, якщо її густина пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей і в вершинах квадрата дорівнює одиниці.

23. Визначити статичні моменти однорідної чверті круга $x^2 + y^2 = 25$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) відносно координатних осей.

Завдання для самостійної роботи

24. За допомогою подвійних інтегралів обчислити площі фігур, обмежених лініями:

а) $x = y^2 - 2y;\ \ x + y = 0;$ б) $x = y;\ \ y = 5x;\ \ x = 1.$

25. Користуючись подвійним чи потрійним інтегралами, знайти об'єми тіл, що обмежені поверхнями:

а) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 4,\ y = 4,\ z = x^2 + y^2 + 1;$

б) $x + y + z = 1,\ x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0.$

26. Визначити статичні моменти даної однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $x + y = 2$, $y = 0$, відносно координатних осей.

.

Змістовий модуль 4. ***Криволінійні інтеграли***

Криволінійний інтеграл першого роду

Криву $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [a,b]: \\ z = z(t) \end{cases}$

називають *гладкою*, якщо функції *x(t), y(t), z(t)* – неперервно диференційовані.

Криву, що складається зі скінченної кількості гладких кривих і не має точок самоперетину, називають *кусково-гладкою.*

Нехай *L* - відрізок кусочно-гладкої кривої з початком в точці *A* і кінцем в точці *B*, *z* = *f*(*x*, *y*) - обмежена функція, задана в деякій області, в якій розташована крива *L*. Розіб'ємо криву *L* точками на *n* елементарних дуг, довжини яких Δl_i. На кожній дузі виберемо точку M_i. Тоді, якщо існує границя:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta l_i$$

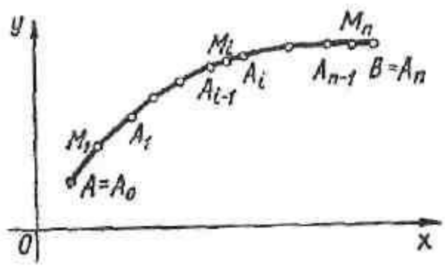


Рис. 4.1

яка не залежить ні від вибору точок, ні від розбиття, то її називають *криволінійним інтегралом 1-го роду* і позначають:

$$\int_L f(x,y)dl, \quad \text{або} \quad \int_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)dl.$$

Криволінійний інтеграл 1-го роду не залежить від напрямку руху здовж кривої *AB*, тобто

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)dl = \int_{\overset{\smile}{BA}} f(x,y)dl.$$

Фізичний зміст криволінійного інтеграла першого роду.

Маса розподілена вздовж кривої *L* з густиною $\mu = \mu(x,y,z) \geq 0$

$$\int_L \mu(x,y,z)dl = m(L).$$

Основні властивості криволінійного інтеграла першого роду.

1) $\int_L 1dl = l(L)$; 2) лінійність; 3) адитивність.

Методи обчислення:

1. Явне задання кривої: $y = y(x)$, $x \in [a,b]$:

$$\boxed{\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.}$$

2. Параметричне задання кривої: $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$),

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

3. Крива L задана в полярних координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$,

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho_\varphi'^2 + \rho^2}\,d\varphi.$$

Приклад 1. Обчислити $\int_L \frac{dl}{x+2y+5}$, де L – відрізок прямої $y = 2x - 2$ між точками A(0;-2), B(1;0).

Розв'язання.

За формулою $\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$

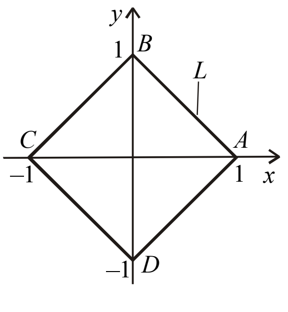
маємо $dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{1+4}\,dx = \sqrt{5}dx,$

$$\int_L \frac{dl}{x+2y+5} = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{x + 2(2x-2) + 5} = \sqrt{5}\int_0^1 \frac{dx}{5x+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln|5x+1|\,\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln 6.$$

Приклад 2. Обчислити: $\int_L xydl,\ (L) := (|x| + |y| = 1).$

Розв'язання.

Тут L є контур квадрата з центром у початку координат з довжиною сторони $\sqrt{2}$ (рис. 4.3).



$$\int_L xydl = \int_{(AB)} xydl + \int_{(BC)} xydl + \int_{(CD)} xydl + \int_{(DA)} xydl = 2\left(\int_{(AB)} xydl + \int_{(BC)} xydl\right) =$$

$$= 2\left(\int_0^1 x(1-x)\sqrt{1+(-1)^2}\,dx + \int_{-1}^0 (x+1)x\sqrt{2}dx\right) = 2\sqrt{2}\left(\int_0^1 \left(x - x^2\right)dx + \int_{-1}^0 \left(x^2 + x\right)dx\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^0\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\right) = 0.$$

Рис. 4.3

Криволінійний інтеграл другого роду

Нехай L - відрізок кусочно-гладкої кривої з початком в точці A і кінцем в точці B, $P(x, y)$, $Q(x,y)$, $R(x,y)$ - обмежені функції, задані в деякій області, в якій розташована крива L. Розіб'ємо криву L точками на n елементарних дуг, довжини яких Δl_i з проекціями на осях координат кожної елементарної частини l_i відповідно Δx_i ,Δy_i, Δz_i . На кожній дузі виберемо точку M_i .Тоді, якщо існує границя:

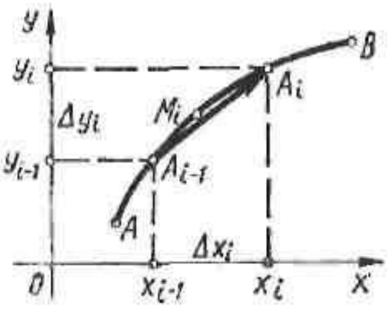


Рис. 4.2

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i,$$

яка не залежить ні від вибору точок ні від розбиття, то її називають криволінійним інтегралом 2-го роду від P, Q, R вздовж кривої AB і позначають:

$$\boxed{\int\limits_{\cup AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.}$$

Криволінійні інтеграли другого роду володіють основними властивостями визначених інтегралів – лінійністю, адитивністю, також для криволінійного інтегралу 2-го роду важливий напрямок інтегрування, тобто

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(x,y,z)dz = -\int\limits_{\cup BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(x,y,z)dz.$$

Якщо контур L інтегрування замкнений, то величина криволінійного інтеграла уздовж цього контура не залежить від вибору початкової точки інтегрування.

Для криволінійного інтегралу 2-го роду важливий напрямок інтегрування, тобто

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\cup BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

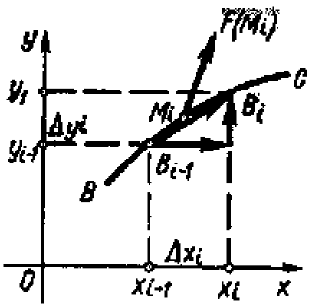


Рис. 4.3

Криволінійний інтеграл другого роду можна розглядати як інтеграл від вектор-функції $\vec{F}(x,\ y) = (P(x,\ y),\ Q(x,\ y))$ за диференціалом радіус-вектора $d\vec{r} = (dx,\ dy)$ дуги кривої лінії L, тобто:

$$\int\limits_L (P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy) = \int\limits_L \vec{F}(x,\ y)\cdot d\vec{r}\ .$$

Методи обчислення:

1. Явне задання кривої: $y = y(x),\ x \in [a,b]$:

$$\boxed{\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x))dx.}$$

2. Параметричне задання кривої:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \qquad t \in [a,b]: \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\int\limits_{\cup AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_a^b (P + Qy'(t) + Rz'(t))dt.$$

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_L \left(y^2 dx + x^2 dy \right)$, де L — нижня дуга параболи $y^2 = x, \ \ 0 \le x \le 1$, обхід якої здійснюється проти годинникової стрілки.

Розв'язання.

Отже, за формулою

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\,y'(x))dx$$

маємо:

$$\int\limits_L \left(y^2 dx + x^2 dy \right) = \int\limits_0^1 \left(x dx + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \right) = \int\limits_0^1 \left(x + \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \right) dx == \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = 0{,}7.$$

Приклад 4. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду $\int\limits_L ydx + (x+z)dy + (x-y)dz$, де L – відрізок прямої між точками $A(1;-1;1)$ і $B(2;3;4)$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді $x = 1 + t, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 1 + 3t.$ Відрізку AB відповідають значення параметра $0 \le t \le 1$. Отримуємо

$$\int\limits_L ydx + (x+z)dy + (x-y)dz = \int\limits_0^1 \left((-1+4t) + (2+4t)4 + (2-3t)3 \right) d = \int\limits_0^1 (13 + 11t)dt = 18{,}5.$$

Зв'язок між криволінійними інтегралами:

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl.$$

де $cos\,\alpha$, $cos\,\beta$, $cos\,\gamma$ - направляючі косинуси дотичної, в припущенні, що її напрямок відповідає напрямку шляху інтегрування.

Формула Гріна *(зв'язок криволінійного та подвійного інтегралів):*

Нехай замкнутий контур L обмежує область S. Тоді вірна формула:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

перетворює криволінійний інтеграл від $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, взятого (проти годинникової стрілки) вздовж замкнутого контура L, в подвійний інтеграл по області S, обмеженої цим контуром.

Площа, обмежена контуром L

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_L xdy - ydx\,.$$

Застосування криволінійних інтегралів:

1. Знаходження довжин кривих: $l = \int\limits_L dl.$

2. Знаходження площ фігур: $S = \dfrac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$

3. Застосування в механіці: маса кривої: $m = \int\limits_L \gamma(x,y,z)dl,$

координати центра мас; $x_c = \dfrac{1}{m}\int\limits_L x\gamma(x,y,z)dl$, $y_c = \dfrac{1}{m}\int\limits_L y\gamma(x,y,z)dl$,

$z_c = \dfrac{1}{m}\int\limits_L z\gamma(x,y,z)dl$.

4. Робота сили вздовж кривої:

5. $A = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz,$ де $P,\ Q,\ R$ - координати $\vec{F}$.

Приклад5. Знайти масу дуги кривої

$$\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t, \\ y = e^t \cdot \sin t, \\ z = e^t, \end{cases}$$ густина якої змінюється за законом *r=2z*.

Розв'язання. Оскільки $m = \int\limits_L \gamma(x,y,z)dl,$

то маса, яку потрібно знайти

$$m = \int\limits_L 2zdl$$

в точках конічної гвинтової лінії. Параметр t змінюється від 0 до 2π.

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt,$$

$$x'(t) = e^t\cos t - e^t\sin t, \quad y'(t) = e^t\sin t + e^t\cos t, \quad z'(t) = e^t.$$

Тоді

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{e^{2t}(2\cos^2 t - 2\sin t\cos t + 2\sin^2 t + 2\sin t\cos t + 1)} = \sqrt{3}e^t,$$

або $dl = \sqrt{3}e^t dt$.

Обчислюємо

$$m = \int\limits_{AB} 2zdl = 2\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} e^{2t}dt = \sqrt{3}e^{2t}\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{3} \text{ (од. маси).}$$

Приклад5. Знайти масу m, що розподілена з густиною $f(x,y) = y\sin x$ на верхній половині кола $x^2 + y^2 = \dfrac{\pi^2}{4}$.

Розв'язання. Використовуючи фізичне значення інтеграла по області, маємо: $m = \int\limits_L \gamma(x,y,z)dl.$

Рівняння дуги AB (заданого півкола) можна записати у явному вигляді $y=\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2}, \quad 0\le x\le\pi.$

Одержимо:

$$m=\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2}\sin x\frac{\pi dx}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2}}=\frac{\pi}{2}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\pi \quad \text{(одиниць вимірювання).}$$

Приклад 6. Обчислити роботу A сили $\vec{F}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$, яку вона здійснює на шляху, що з'єднує точки $A(1;1;1)$ до $B(2;3;4)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді $x=1+t, \quad y=1+2t, \quad z=1+3t.$ Відрізку AB відповідають значення параметра $0\le t\le 1$. Отримуємо

$$\int_L yzdx+xzdy+xydz=\int_0^1\big((1+2t)(1+3t)+(1+t)(1+3t)\cdot 2+(1+t)(1+2t)\cdot 3\big)dt=$$

$$=\int_0^1(18t^2+22t+6)dt=23.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається криволінійним інтегралом першого роду? У чому полягає його геометричний і фізичний зміст?
2. Як обчислюється криволінійний інтеграл першого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння контура інтегрування задано у параметричній формі?
3. Як вичислюється криволінійний інтеграл першого роду, якщо рівняння лінії інтегрування задано у вигляді $y=y(x), \ x\in[a,b]$?
4. Як з допомогою криволінійного інтеграла першого роду обчислити площу циліндричної поверхні та знайти довжину дуги?
5. Як з допомогою криволінійного інтеграла першого роду знайти центр маси та моменти інерції матеріальної кривої відносно осей координат?
6. Що називається криволінійним інтегралом другого роду? У чому полягає його фізичний зміст?
7. Як обчислюється криволінійний інтеграл другого роду за допомогою визначеного інтеграла?
8. Як з допомогою криволінійного інтеграла другого роду обчислити площу плоскої фігури?
9. Як обчислити роботу змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж заданої кривої?
10. У чому полягає зв'язок між криволінійними інтегралами першого та другого родів?
11. Записати Формулу Гріна.

Навчальні завдання

27. Обчислити криволінійні інтеграли першого роду:

а) $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, де L – відрізок прямої $y=\frac{1}{2}x-2$ між точками $A(0, -2)$ та $B(4, 0)$;

б) $\int\limits_L xydl$, де L – сторони прямокутника з вершинами $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$, $D(0, 2)$;

в) $\int\limits_L (x^2+y^2)dl$, де L – коло: $x=a\cos t, \quad y=a\sin t.$

28. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду:

а) $\int\limits_L (x^2-2y)dx+(2xy+y^2)dy$, де де L – дуга параболи $y=x^2$ від точки $A(1;1)$ до $B(2;4)$;

б) $\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$, де L – відрізок прямої між точками $A(1;1;1)$ і $B(2;3;4)$;

в) $\int\limits_L xydx+xzdy+xydz$, де L – дуга гвинтової лінії $x=R\cos t, \quad y=R\sin t, \quad z=\frac{at}{2\pi}$ від точки перетину лінії з площиною $z = a$.

29. Знайти масу чверті еліпса $x = a\cos t$, $y=b\sin t$, що розташована в першому квадранті, якщо густина маси в кожній точці дорівнює ординаті цієї точки.

30. Обчислити роботу сили $\vec{F}=2xy\vec{i}+x^2\vec{j}$, яку вона здійснює на шляху, що з'єднує точки $A(0;0)$ до $B(2;1)$.

Завдання для самостійної роботи

31. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду:

1) $\int\limits_C \frac{x+2y}{\sqrt{1+9x^4}}dS$, де C – дуга кривої $y = x^3$ при $0 \le x \le 2$.

2) $\int\limits_C \frac{1}{64}x^2 dS$, де C – чверть кола $x^2 + y^2 = 64$ при $x \le 0$, $y \ge 0$.

3) $\int\limits_C \frac{x^2 y}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dS$, де C – дуга синусоїди $y = \sin x$ при $0 \le x \le \pi$.

32. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду:

1) $\int\limits_L \frac{dx-dy}{\sqrt{xy}}$, де L – відрізок прямої $x + y = 1$ при $0 \le x \le 1$.

2) $\int\limits_L y^2dx - x^2dy$, де L – дуга параболи $y = 1 - x^2$ від точки А(–1; 0) до точки В(1; 0).

3) $\oint\limits_L y^2dx - xydy$, де L – контур трикутника O(0; 0), A(1; 3), B(3; 1) (обхід здійснюється проти руху стрілки годинника).

4) $\int\limits_L 2xydx - x^2dy$, де L – дуга першої арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, причому рух здійснюється в напрямі зростання параметра t.

33. Знайти масу дуги кривої $\mathrm{x} = 2\mathrm{t}$, $y = \dfrac{1}{t^2}$; $z = \dfrac{2}{3t^3}$; $(0 \le t \le 1)$, густина якої змінюється за законом $r = \sqrt{y}$.

34. Дано точки А(-2,0) і В(0,2). Визначити роботу силу $\vec{F}(4,2)$.

Змістовий модуль5. ***Поверхневі інтеграли***

Поверхневі інтеграли 1-го роду

Нехай функція *f(x, y, z)* визначена і обмежена на гладкій поверхні *S*. Розіб'ємо поверхню *S* на „елементарні" поверхні S_i, площі яких ΔS_i. Нехай λ - найбільший з діаметрів S_i і M_i - довільна точка поверхні S_i. Тоді, якщо існує границя: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta S_i$ яка не залежить ні від вибору точок ні від розбиття, то її називають поверхневим інтегралом 1-го роду функції *f (x, y, z)* по поверхні *S* і позначають:

$$\boxed{\iint\limits_S f(x,y,z)dS}.$$

Геометричний зміст поверхневого інтеграла 1-го роду.

Маса розподілена по поверхні *S* з густиною $\mu = f(x,y,z) \ge 0$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = m(S).$$

Основні властивості поверхневого інтеграла 1-го роду.

1) $\iint\limits_S 1\cdot dS = S$ – площа поверхні;

2) лінійність;

3) адитивність.

Обчислення поверхневих інтегралів першого роду

Обчислення поверхневих інтегралів можна звести до обчислення відповідних подвійних інтегралів.

Якщо *S* – незамкнена поверхня, яка задається рівнянням *z* = *q*(*x*, *y*), а область *D* – проекція цієї поверхні на площину *xOy*, тоді

$$\boxed{\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.}$$

Якщо поверхня *S* замкнена, тоді її розбивають на дві незамкнені поверхні S_1 та S_2 так, щоб обидві вони проектувалися на одну область *D* площини *xOy*. Якщо рівнянням поверхні S_1 буде $z = q_1(x, y)$, а рівнянням поверхні S_2 буде $z = q_2(x, y)$, тоді

$$\boxed{\begin{aligned}\iint\limits_S f(x,y,z)dS &= \iint\limits_D f(x,y,q_1(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)^2}\,dxdy+\\ &+\iint\limits_D f(x,y,q_2(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial q_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial q_2}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.\end{aligned}}$$

Приклад 1. Обчислити $\iint\limits_S xyzdS$, де *S* – частина площини *x* + *y* + *z* = 1, яка лежить в першому октанті (рис. 5.1).

Розв'язання. В даному випадку рівнянням поверхні S буде $z = 1 - x - y$, її проекцією – областю D буде прямокутний трикутник обмежений лініями: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

Поверхня S – незамкнена, тому за формулою

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x} = 1;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$ Тому $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3}.$ Одержимо:

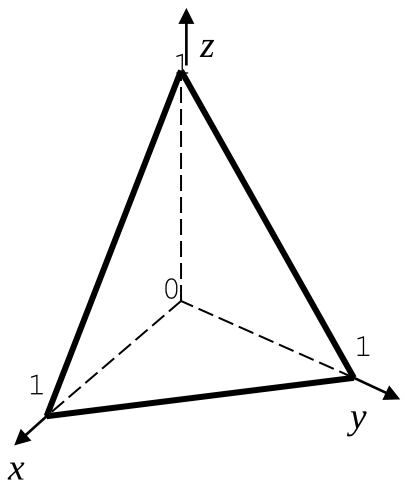


Рис. 5.1

$$\iint_S xyzdS = \sqrt{3}\iint_D xy(1-x-y)dxdy =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1\left[x\int_0^{1-x} y(1-x-y)dy\right]dx = \sqrt{3}\int_0^1 x\left[\left(\frac{y^2}{2}-\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{1-x}\right]dx =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left(\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{x(1-x)^2}{2}-\frac{(1-x)^3}{3}\right)dx =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left(\frac{(1-x)^2}{2}(1-x)-\frac{(1-x)^3}{3}\right)dx =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left(\frac{(1-x)^3}{2}-\frac{(1-x)^3}{3}\right)dx = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{x(1-x)^3}{6}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 (x-3x^2+3x^3-x^4)dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{x^2}{2}-x^3+\frac{3x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{2}-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{20} = \frac{\sqrt{3}}{120}.$$

Приклад 2. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_S \left(x^2+y^2\right)dS$, де S півсфера, $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Розв'язання. Маємо $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$,

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,\quad dS = \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}};$$

$$l = \iint_S \left(x^2+y^2\right)dS = \iint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy.$$

Поверхня S проектується на площину xOy в область D. Область D — коло $x^2 + y^2 \le 1$.

Для обчислення подвійного інтеграла $\iint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$

по області D перейдемо до полярної системи:

$x = \rho\ cos\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi; \quad y = \rho\ sin\varphi, \quad 0 \le p < +\infty.$

В полярних координатах область D визначається наступними формулами:

$x^2 + y^2 \le 1, \quad \rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \le 1, \quad \rho \le 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

В силу симетрії кола і парності підінтегральної функції оберемо значення полярного кута: $0 \le \varphi \le \pi/2$, тоді

$$l = \iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{4\pi}{3}$$

(внутрішній інтеграл обчислюється за допомогою підстановки: $\rho = sint, d\rho = costdt$, $\sqrt{1-\rho^2} = \cos t$; $\rho = 0, \quad t = 0; \quad \rho = 1, \ t = \frac{\pi}{2}$;)

$$\int_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t \cos t}{\cos t} dt = -\int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2 t\right) d\cos t = \frac{2}{3}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\iint_\sigma z d\sigma$, де σ – частина поверхні конуса

$z^2 = x^2 + y^2$, розташована між площинами $z = 1$, $z = 2$ (рис. 2.1).

Розв'язання.

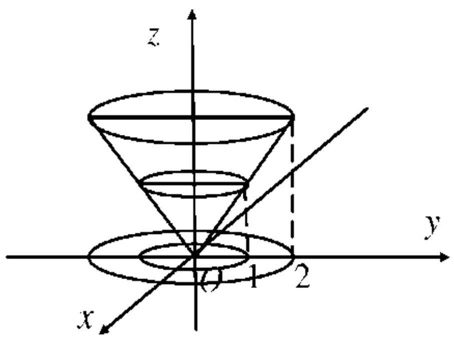


Рис.5.2

Дана частина поверхні проектується на площину xOy в кільце, розташоване між колами $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$. Враховуючи, що

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

Одержимо

$$\iint_\sigma z d\sigma = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2}} dxdy =$$

$$= \sqrt{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \rho^2 d\rho = \frac{14\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Застосування поверхневих інтегралів першого роду

Площа поверхні $\quad \mathrm{S} = \iint_S dS$

Маса розподілена по поверхні $\quad \iint_S \mu(x, y, z) dS = m(S).$

Статистичні моменти поверхні щодо координатних площин

$$M_{\begin{Bmatrix} xy \\ xz \\ yz \end{Bmatrix}} = \iint_S \begin{Bmatrix} z \\ y \\ x \end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dS$$

Координати центра мас поверхні

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}$$

Моменти інерції поверхні щодо координатних площин

$$\mathrm{I}_{\begin{Bmatrix} xy \\ xz \\ yz \end{Bmatrix}} = \iint_S \begin{Bmatrix} z^2 \\ y^2 \\ x^2 \end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dS$$

Моменти інерції поверхні щодо осей координат

$$\mathrm{I}_{\begin{Bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{Bmatrix}} = \iint_S \begin{Bmatrix} y^2+z^2 \\ x^2+z^2 \\ x^2+y^2 \end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dS$$

Моменти інерції поверхні щодо початку координат

$$I_O = \iint_S (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dS$$

Поверхневий інтеграл другого роду.

Розглянемо деяку поверхню σ в тривимірному просторі. Виберемо на поверхні точку *M*, проведемо в ній нормаль $\vec{n}$ до поверхні певного напряму і розглянемо довільний замкнений контур *L*, який виходить з точки *M* і повертається в точку *M*, причому контур не перетинає край поверхні, якщо він є.

Якщо для довільної точки *M* поверхні σ і для довільного замкненого контуру *L*, який проходить через точку *M* і не перетинає край поверхні, після обходу ми повертаємося в точку *M* з початковим напрямом нормалі $\vec{n}$, то поверхню σ називають *двосторонньою.*

Поверхню σ, у кожній точці якої вказано нормальний вектор $\vec{n}$ й напрям обходу контуру *L*, називають *орієнтовною* (рис. 5.1).

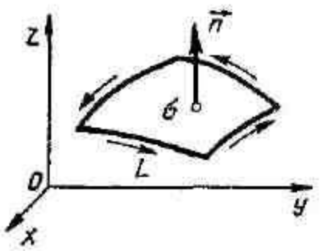


Рис. 5.1

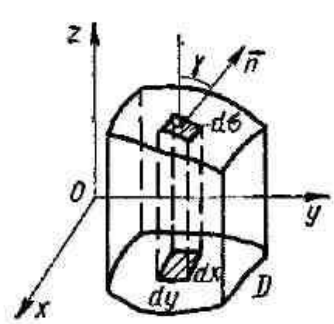


Рис. 5.2

Нехай σ – гладка поверхня, задана рівнянням $z = f(x,y)$ і $R(x,y,z)$ – обмежена функція, визначена в точках поверхні σ. Розіб'ємо її довільно на *n* частин. Позначимо через D_i проекцію i-ї частини поверхні σ_i на площину xOy, а через ΔS_i – площу D_i , взяту із знаком плюс, якщо обрана зовнішня сторона поверхні σ, та із знаком мінус – якщо внутрішня. Виберемо в кожній частині σ_i довільну точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ і складемо суму інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i .$$

Нехай $\lambda = \max_{1\le i\le n} d(\sigma_i)$ – максимальний діаметр поверхонь σ_i. Якщо при $\lambda \to 0$ інтегральна сума має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ, ні від вибору точок M_i , то цю границю називають

поверхневим інтегралом другого роду і позначають так:

$$\boxed{\iint_{\sigma} R(x, y, z)\Delta S = \iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy.}$$

Будемо вважати, що на поверхні σ визначені і неперервні функції $P(M)$, $Q(M), R(M)$ а також вибрано орієнтацію σ^+, тоді можна розглядати інтеграли $\iint_{\sigma^+} P(M)dydz,\quad \iint_{\sigma^+} Qdxdz(M)dxdz,\quad \iint_{\sigma^+} R(M)dxdy,$ і суму цих інтегралів

$$\boxed{\iint_{\sigma^+} P(M)dydz + Q(M)dxdz + R(M)dxdy}$$

називають *поверхневим інтегралом другого роду.*

Оскільки $dxdy = \cos\gamma\, d\sigma,\quad dxdz = \cos\beta\, d\sigma,\quad dydz = \cos\alpha\, d\sigma,$ (рис.5.2) де $d\sigma$ – де елемент площі поверхні σ, α, β, γ – кути між нормаллю до поверхні σ та осями Ox, Oy, Oz відповідно, то справедливі такі формули

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz = \iint_{\sigma} P(x, y, z)d\sigma;$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz = \iint_{\sigma} Q(x, y, z)d\sigma;$$

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{\sigma} R(x, y, z)d\sigma.$$

Поверхневі інтеграли другого роду обчислюються за допомогою подвійних інтегралів.

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy;$$

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz = \pm\iint_{\sigma} P(x(y, z), y, z)dydz;$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz = \pm\iint_{\sigma} Q(x, y(x, z), z)dxdz.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy$ де σ – зовнішня

поверхня

площини $x + 2z - 2 = 0$, розташована в 1 октанті та відсічена площиною $y = 4$.

Розв'язання.

1) $\iint\limits_{\sigma} xdydz$. Із рівняння поверхні: $x=2-2z$. Проекція площини на yOz прямокутник: $0 < y < 4,\ 0 < z < 1$. Тоді:

$$\iint\limits_{\sigma} xdydz = 2\int_0^4 dy\int_0^1 (1-z)dz = 2\int_0^4 \left(z - \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 dy = 2\int_0^4 \frac{1}{2}dy = \int_0^4 dy = 4.$$

2) $\iint\limits_{\sigma} ydxdz = 0,$ оскільки площина паралельна осі Oy.

3) $\iint\limits_{\sigma} zdxdy.$ І з рівняння поверхні: $z = \frac{1}{2}(2-x)$. Проекція площини на xOy прямокутник: $0 < y < 4,\ 0 < x < 2$. Тоді:

$$\iint\limits_{\sigma} zdxdy = \frac{1}{2}\int_0^4 dy\int_0^2 (2-x)dx == \frac{1}{2}\int_0^4 2dy = \int_0^4 dy = 4.$$

За властивістю інтеграла:

$$\iint\limits_{\sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint\limits_{\sigma} xdydz + \iint\limits_{\sigma} ydxdz + \iint\limits_{\sigma} zdxdy = 8.$$

Зв'язок між потрійним та поверхневими інтегралами. Формула Остроградського-Гауса.

Нехай тіло V обмежене гладкою поверхнею σ, функції $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ - неперервні в цій області разом зі своїми похідними. Тоді вірна формула Остроградського-Гауса:

$$\boxed{\iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \oint\!\!\!\oint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.}$$

Ця формула встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею.

Приклад5.

Користуючись формулою Остроградського-Гаусса,обчислити поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_{\sigma} x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy,$$

де σ – повна поверхня циліндра $x^2 + y^2 = 4$, вміщеного між площинами $z=0$, $z=3$ (Рис.5.3).

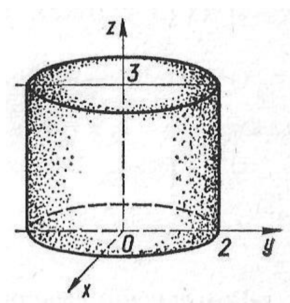


Рис. 5.3

Розв'язання.

За формулою $\iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \oint\!\!\!\oint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$ де $P(x,y,z)=x^3$, $Q(x,y,z)=y^3$, $R(x,y,z)=z^3$.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=3y^2,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=3z^2,$$

$$\iint_{\sigma} x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy=3\iiint_{G}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=3\iint_{D}dxdy\int_0^3(x^2+y^2+z^2)dz=$$

$$=9\iint_{D}(x^2+y^2+3)dxdy=9\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2(\rho^2+3)\rho d\rho=180\pi.$$

Зв'язок між криволінійним та поверхневим інтегралами. Формула Стокса.

Нехай в деякій області, в якій розташовано поверхню σ, яка натягнута на контур L, задано функції $P = P(x,y,z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$, які неперервні в цій області разом зі своїми похідними . Тоді вірна формула Стокса:

$$\boxed{\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz.}$$

Формула Гріна буде частинним випадком формули Стокса. Якщо поверхневий інтеграл першого типу замінити інтегралом другого типу, то одержимо формулу

$$\boxed{\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\sigma}\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right)d\sigma}$$

Формулу Стокса зручно записувати за допомогою визначника:

$$\boxed{\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & R & Q\end{vmatrix}d\sigma.}$$

Приклад 6. Користуючись формулою Стокса, обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_L x^2y^2dx+dy+zdz,\quad \text{де } L-\text{коло}\ \begin{cases}x^2+y^2=R^2;\\ z=0.\end{cases}$$

Розв'язання . Маємо $P(x,y,z)=x^2y^2$, $Q(x,y,z)=1$, $R(x,y,z)=z$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x^2y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial y}=0.$$

Отже, за формулою

$$\int_L x^2y^2dx+dy+zdz,=-2\iint_D x^2ydxdy=-2\int_{-R}^{R}x^2dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}ydy=0.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається поверхневим інтегралом першого роду? Як обчислюється такий інтеграл?
2. Які поверхні називаються двосторонніми?
3. Що називається поверхневим інтегралом другого роду?
4. Як обчислюється поверхневий інтеграл другого роду?
5. У чому полягає зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду?
6. Записати формулу Остроградського –Гаусса.
7. Записати формулу Стокса.

Навчальні завдання

35. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду:

а) $\iint\limits_{\sigma} xyzd\sigma,$ де σ – півсфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

б) $\iint\limits_{\sigma} x^2y^2z^2d\sigma,$ де σ – частина площини $x+y+z=1,$ розміщена в першому октанті.

в) $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{x^2+y^2}d\sigma,$ де σ – частина конічної поверхні $x^2+y^2=z^2,$ розміщена між площинами $z=0, \quad z=2.$

г) $\iint\limits_{\sigma} x^2y^2d\sigma,$ де σ – частина поверхні параболоїда $x^2+y^2=2z^2, z\le 1$.

д) $\iint\limits_{\sigma} (-x^2+2y+z-1)d\sigma,$ де σ – частина площини $3x-3y+z=1,$ розміщена в першому октанті.

36. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду:

а) $\iint\limits_{\sigma} yzdxdy+xzdydz+xydxdz$, де σ – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=1$, яка лежить в першому октанті.

б) $\iint\limits_{\sigma} yzdxdy+xzdydz+xydxdz$, σ – зовнішня сторона тетраедра, обмеженого площинами: $\mathrm{x}=0, \ \mathrm{y}=0, \ \ \mathrm{z}=0, \ \ \mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z}=5$.

в) $\iint\limits_{\sigma} zdxdy$ де σ – зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1.$

г) $\iint\limits_{\sigma} \frac{x^2y^2}{z^2}dxdy,$ де σ – поверхня конуса $x^2+y^2=z^2$ обмежена площиною $z=5.$

37. Використовуючи формулу Остроградського, обчислити інтеграли по вказаній поверхні σ:

$\iint\limits_{\sigma} yzdxdy+xzdydz+xydxdz,$, де σ – зовнішня сторона поверхні піраміди $x+y+z=1,$ розміщена в першому октанті.

Завдання для самостійної роботи

38. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду:

а) $\iint\limits_{\sigma}(2x+y+z-1)d\sigma,$ де σ – частина площини $3x+y+z=1,$ розміщена в першому октанті.

б) $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)d\sigma,$ де σ – півсфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$

в) $\iint\limits_{\sigma} xyzd\sigma,$ де σ – поверхня, обмежена частиною параболоїда $x^2+y^2=2z^2$ та площиною $z=3.$.

39. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду:

а) $\iint\limits_{\sigma} ydxdy+zdydz+ydxdz,$ де σ – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=4,$ яка лежить в першому октанті.

б) $\iint\limits_{\sigma} zdxdy+xdydz+ydxdz,$ σ – зовнішня сторона тетраедра, обмеженого площинами: $x=0,$ $y=0,$ $z=0,$ $x+y+z=2.$

в) $\iint\limits_{\sigma} z^2dxdy,$ де σ – поверхня конуса $x^2+y^2=z^2$ обмежена площиною $z=5.$

40. Використовуючи формулу Остроградського, обчислити інтеграл $\iint\limits_{\sigma} yxdxdy+xzdydz+xydxdz,$, де σ – зовнішня сторона поверхні, розташованої в першому октанті і складеної з поверхонь $x^2+y^2=4,$ $x=0,$ $y=0,$ $z=0,$ $z=5.$

Змістовий модуль6. ***Векторне поле***

Визначення полів та їх характеристики.

Теорія поля є важливим і перспективним розділом вищої математики, оскільки на кожну людину впливає космічне поле, поле тяжіння Землі, електричні та магнітні поля, біополя.

Означення 1. Фізичним полем називають частину простору або весь простір, в якому здійснюється фізичне явище.

Якщо деяка фізична величина в кожній точці області приймає певне значення, то тим самим задається поле цієї величини.

Означення 2. Якщо фізична величина в кожній точці області приймає певне числове значення, то поле називають *скалярним.*

Скалярне поле величини u в області D можна задати у вигляді скалярної функції.

$$u = u(M), \quad M \in D.$$

областю визначення якої є D.

Означення 3. Якщо фізична величина в кожній точці області приймає векторне значення, то її поле називають *векторним.*

Векторне поле в області D задається вектор-функцією $\vec{a} = \vec{a}(M), M \in D$.

Якщо $D \in R_3$, то положення точки $M \in D$ визначається координатами x, y, z. Тому скалярне поле задається скалярною функцією трьох змінних

$$u = u(x, y, z).$$

Векторне поле в тривимірному просторі визначається

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

тобто трьома скалярними функціями-проекціями на відповідні осі координат.

Векторне поле називають *плоским,* якщо його можна задати у вигляді

$$\vec{a} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

Характеристики векторного поля

1. *Векторною лінією* поля $\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$ називають лінію, в кожній точці якої дотична співпадає з напрямом $\vec{a}(M)$.

Якщо координати векторного поля неперервні разом із своїми похідними першого порядку в точці M_0, то через точку M_0 проходить лише одна векторна лінія.

Рівняннями векторних ліній будуть розв'язки диференціальних рівнянь

$$\boxed{\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.}$$

2. Точку M_0 називають *особливою точкою* поля $\vec{a}(M)$, якщо $\vec{a}(M_0)=0$ або хоч би одна з проекцій цього поля має розрив в точці M_0

Найчастіше фізичні векторні поля мають неперервні проекції, а їх особливими точками є точки, де $\vec{a}(M_0)=0$ і які називають *точками спокою*.

Точки спокою класифікують в залежності від виду векторних ліній в околі цих точок.

3. *Потік векторного поля* $\vec{a}(M)$ через поверхню *σ* характеризує різницю *П*=*N*₊-*N* де *N*₊ – кількість векторних ліній поля, які проходять через поверхню *σ* і мають однаковий напрям з нормаллю $\vec{n}$ до цієї поверхні, а *N*₋ – кількість векторних ліній поля, які мають протилежний напрям.

Потік векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхню *σ* визначають поверхневим інтегралом другого роду за формулою

$$\boxed{\Pi=\iint_{\sigma}\left(\vec{a},\vec{n}\right)d\sigma},$$

де $\vec{n}$ – нормаль до поверхні *σ* в точці *M*.

Нехай $\vec{n}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma$ – вектор нормалі в довільній точці до поверхні *σ*.

Тоді

$$\boxed{\Pi=\iint_{\sigma}\left(\vec{a},\vec{n}\right)d\sigma=\iint_{\sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)d\sigma,}$$

де

$$\cos\alpha=\frac{\mp\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};\qquad \cos\beta=\frac{\mp\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};$$

$$\cos\varphi=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Дану формулу можна записати у вигляді:

$$\boxed{\Pi=\iint_{\sigma}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy.}$$

Враховуючи, що

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

то отримаємо

$$\boxed{\Pi = \iint\limits_D \left[\frac{\partial z}{dx} P(x, y, z(x, y)) + \frac{\partial z}{\partial y} Q(x, y, z(x, y)) - R(x, y, z(x, y)) \right] dxdy}$$

Потік векторного поля через замкнену поверхню σ, в напрямі зовнішньої нормалі, дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції векторного поля за областю G,обмеженої цією поверхнею.

$$\boxed{\oiint\limits_{\sigma} \left(\vec{a}, \vec{n}\right) d\sigma = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \vec{a} dxdydz.}$$

Цю формулу називають *формулою Остроградського-Гаусса.*

Якщо векторне поле *v=v(x,y,z)* поле швидкостей у потоці рідини, то величина *П* є різницею між кількістю рідини, що виливається з області σ, і кількістю рідини, що вливається в цю область. При *П*=0 в область вливається і виливається однакова кількість рідини. Якщо П > 0, то з області σ виливається більше ніж вливається. Це означає, що в області є джерела, які поповнюють потік рідини. Якщо П < 0, то це означає, що є стоки, які поглинають рідину з потоку.

4. *Дивергенція (розходження)* векторного поля $\vec{a}(M)$ характеризує щільність потоку поля через замкнену поверхню σ в точці M, яка знаходиться в області, що обмежена σ. Дивергенцію векторного поля $\vec{a}(M)$ обчислюють за формулою:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

Точки M, в яких $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$, називають джерелами векторного поля. Точки M, в яких $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$, називають точками стоку (стікання).

5. *Циркуляція* C векторного поля $\vec{a}(M)$ характеризує обертальну спроможність поля і її знаходять з використанням криволінійного інтеграла другого роду за формулою:

$$\boxed{C = \oint\limits_L \vec{a}(M) d\vec{r}}$$

де L – деякий замкнений контур, $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ - диференціал радіуса-вектора точки $M \in L$.

Для обчислення циркуляції C векторного поля $\vec{a}(M)$ використовують формулу Стокса:

$$\boxed{C = \oint\limits_L \vec{a} \cdot \vec{dr} = \iint\limits_{\sigma+} \vec{n}^0 \cdot rot\vec{a} d\sigma.}$$

7. *Вихор (ротор)* векторного поля $\vec{a}(M)$ є вектором, який характеризує поверхневу щільність циркуляції, позначають $\operatorname{rot} \vec{a}(M)$, визначають формулою:

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial R}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.}$$

Останню формулу можна записати у більш прийнятному для використання вигляді:

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & R & Q\end{vmatrix}}$$

*Приклад 1***.** Знайти векторні лінії, дивергенцію та вихор поля $\vec{a}=2x\vec{i}-y\vec{j}+z\vec{k}.$

Розв'язання. Для знаходження рівнянь, векторних ліній заданого поля треба знайти розв`язки системи диференціальних рівнянь $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$, які приймають вид:

$$\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}\Rightarrow \quad 1)\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{-y};\Rightarrow 2)\frac{dx}{2x}=\frac{dz}{z}.$$

Інтегруючи рівняння першого порядку з відокремленими змінними отримаємо сукупність ліній:

$$1)\ \frac{1}{2}\ln x=-\ln y+\ln C\Rightarrow \ln C=\ln(\sqrt{x}\cdot y)\Rightarrow \sqrt{x}y=C\Rightarrow y=\frac{C_1}{x}.$$

$$2)\ \frac{1}{2}\ln x=\ln z+\ln C_2\Rightarrow \ln\sqrt{C}x=\ln(C_2z)\Rightarrow \sqrt{x}=C_2z\Rightarrow z^2=C_3x.$$

Відмітимо, що початок координат є особливою точкою для заданого поля, оскільки при $x\to 0$ і $c\neq 0$ маємо $y\to\infty$.

Дивергенцію поля знайдемо за формулою $\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$:

$\operatorname{div}\vec{a}=2-1+1=2.$

Вихор векторного поля знайдемо за формулою $\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & R & Q\end{vmatrix}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2x & -y & z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial z}\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial 2x}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(-\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial 2x}{\partial y}\right)=0.$$

Приклад 2. Обчислити потік векторного поля $\vec{r}(M)$ через верхню сторону нижньої півсфери $x^2+y^2+z^2=1.$

Розв'язання. Потік Π векторного поля $\vec{r}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхню σ знаходимо за формулою:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \right) d\sigma$$

Рівнянням нижньої півсфери буде $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Її проекцією на площину xOy буде круг $D: \quad x^2 + y^2 \le 1.$

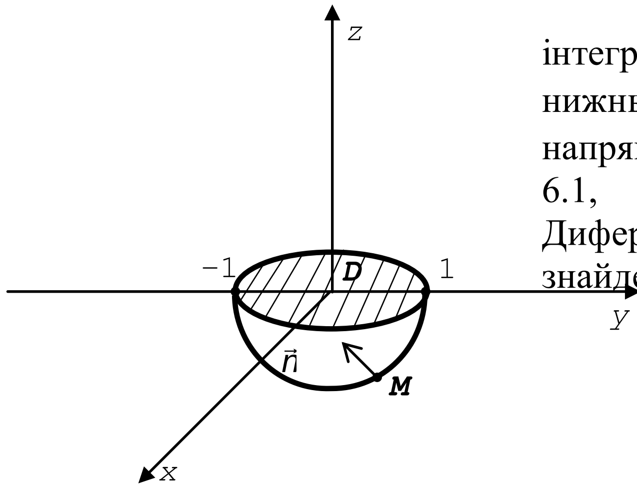


Рис. 6.1

Оскільки поверхня інтегрування σ є верхньою стороною нижньої півсфери, то нормаль $\vec{n}(M)$ напрямлена так, як вказано на рис. 6.1, тобто є внутрішньою. Диференціюванням функції знайдемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - x^2 - y^2}}.$$

Використовуючи формулу

$$\Pi = \iint_D \left[\frac{\partial z}{dx} P(x, y, z(x, y)) + \frac{\partial z}{\partial y} Q(x, y, z(x, y)) - R(x, y, z(x, y)) \right] dxdy,$$

отримаємо:

$$\Pi = \iint_D \left[\frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right] dxdy$$

Переходом до полярних координат

$D: \quad x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 1, \; 0 \le \varphi \le 2\pi,$

і, враховуючи $dxdy = \rho d\rho d\varphi,$, одержуємо:

$$\Pi = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left[\frac{\rho^2 \cos^2\varphi}{\sqrt{1 - \rho^2}} + \frac{\rho^2 \sin^2\varphi^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} + \sqrt{1 - \rho^2} \right] \rho d\rho = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} =$$

$$= \begin{vmatrix} t = 1 - \rho^2 \\ dt = -2\rho d\rho \end{vmatrix} = -2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2} \int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} \right) = -2\pi \cdot \left(\sqrt{t} \;\Big|_0^1 \right) = -2\pi.$$

*Приклад3***.** Знайти потік векторного поля ***a*** = x^2***i*** + x***j*** + xz***k*** через зовнішню сторону поверхні σ, яка є частиною параболоїда $y - z^2 - x^2 = 0$, який розташований в першому октанті між площинами $y = 0,\ y = 1$.

Розв'язання.

Потік векторного поля **a** через поверхню σ в напрямки нормалі ***n*** обчислюється за формулою:

$$\Pi = \iint_\sigma \vec{a} \cdot \vec{n}^{\,0}\, d\sigma.$$

Вибір сторони на поверхні σ рівнозначний вибору напрямки нормального вектора n^0 в любій точці поверхні. Для верхньої (зовнішньої) сторони поверхні σ кут γ між n^0 и віссю Oz підчиняєтся умові $0 \le \gamma \le \pi/2$, тобто $\gamma \ge 0$. Рівняння поверхні в нашому випадку задано в неявному вигляді:

$x^2 - y + z^2 = 0,$ запишемо його в явному виді:

$z = \sqrt{y - x^2}$ (перед коренем вибрано знак «+», так як поверхня розташована в першому октанті: $z \ge 0$). Знайдемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{y - x^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y - x^2} + \frac{1}{4(y - x^2)}} = \sqrt{\frac{4y + 1}{4(y - x^2)}},$$

тоді в силу умови $\cos\gamma \ge 0$ і використовуючи формули

$$\cos\alpha = \frac{\mp \frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};\ \cos\beta = \frac{\mp \frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};\ \cos\varphi = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Маємо $\cos\gamma = \sqrt{\dfrac{4(y - x^2)}{4y + 1}},$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{y - x^2}}}{\sqrt{\frac{4y+1}{4(y - x^2)}}},$

$$\cos\beta = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{y - x^2}}}{\sqrt{\frac{4y+1}{4(y - x^2)}}}$$

($x \ge 0$, поверхня розташована в першому октанті). Тому, $\cos\alpha \ge 0$, $\cos\beta \le 0$, $\cos\gamma \ge 0$. Відповідно до умови задачі

$$Ï = \iint_\sigma x^2 dydz + xdzdx + xzdxdy.$$

Перейшовши в правій частині рівності від поверхневого інтегралу до подвійного, отримаємо

$$\ddot{I} \ = \iint\limits_{D_{yz}} \left(y - z^2\right) dydz - \iint\limits_{D_{zx}} xdzdx + \iint\limits_{D_{xy}} x\sqrt{y - x^2}\, dydx \ ,$$

де D_{yz}, D_{zx}, D_{xy} – проекція поверхні на площини yOz, zOx, xOy.

Знаки подвійних інтегралів визначені з умови

$$\cos\alpha \geq 0,\ \cos\beta \leq 0,\ \ \cos\gamma \geq 0.$$

Обчислимо подвійні інтеграли:

$$\iint\limits_{D_{yz}} \left(y - z^2\right) dydz = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \left(y - z^2\right) dz = \frac{4}{15},$$

$$-\iint\limits_{D_{zx}} xdzdx = -\int_0^1 xdx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz = -\frac{1}{3},$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} x\sqrt{y - x^2}\, dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} x\sqrt{y - x^2}\, dx = \frac{2}{15}.$$

$$\ddot{I} \ = \frac{4}{15} - \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{1}{15}.$$

Приклад 5. Обчислити потік поля $\vec{a}(M) = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхню кулі одиничного радіуса з центром в початку координат.

Розв'язання. Шуканий потік Π заданого поля будемо обчислювати з використанням формули Остроградського-Гаусса.

Позначимо через V задану в умові кулю, а S – поверхню кулі. Тоді

$$\Pi = \iint\limits_{S} \vec{a}(M) d\vec{s} = \iiint\limits_{V} \mathrm{div}\, \vec{a}(M) dV.$$

В заданому випадку

$$\mathrm{div}\, \vec{a}(M) = \frac{\partial(x + y)}{\partial x} + \frac{\partial(y - x)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

тому $\qquad \Pi = \iiint\limits_{V} 3dV = 3\iiint\limits_{V} dV.$

Згідно з геометричним змістом інтегралів по області останній інтеграл дорівнює об'єму заданої кулі $\frac{4}{3}\pi \cdot 1^3.$

Отже, шуканим потоком буде: $\Pi = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi = 4\pi.$

Приклад 6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (2x + 4y + 3z)\vec{k}$ по контуру поверхні σ: $3x + 2y + 3z = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Розв'язання.

Використовуємо формулу Стокса:

$$C=\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint_{\sigma+}\vec{n}^0\cdot rot\vec{a}d\sigma.$$

Знаходимо

$$\text{rot }\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 2x+4y+3z \end{vmatrix} = 4\vec{i}-2\vec{j}.$$

Поверхня σ – частина площини, обмежена трикутником *ABC*, який розташований в площині *3x + 2y + 3z = 6*, нормальний вектор n^0 забезпечує необхідний напрямок орієнтації поверхні:

$$Ц=\iint_{\sigma+}\vec{n}^0\cdot rot\vec{a}d\sigma=\iint_{\sigma}\left\{\left(rot\vec{a}\right)_x dydz+\left(rot\vec{a}\right)_y dxdz+\left(rot\vec{a}\right)_z dxdy=\right.$$

$$=4\iint_{D_{yz}} dydz-2\iint_{D_{xz}} dxdz=4\int_0^3 dy\int_0^{-\frac{2}{3}y+2} dz-2\int_0^2 dx\int_0^{2-x} dz=$$

$$=4\int_0^3\left(-\frac{2}{3}y+2\right)dy-2\int_0^2(2-x)dx=8,$$

де $(\text{rot}\boldsymbol{a})_x$, $(\text{rot}\boldsymbol{a})_y$, $(\text{rot}\boldsymbol{a})_z$ – координати вектора $\text{rot}\,\vec{a}$. Поверхня σ проектується на площину *yOz* в область D_{yz}, обмежену лініями *2y + 3z = 6, z = 0, y = 0;* на площину *xOz* поверхня σ проектується в область D_{xz}, обмежену лініями *x + z = 2, z = 0, x = 0.*

Властивості векторних полів

Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається *соленоїдальним* в області $\overline{D}$, якщо у будь-якій точці цієї області дивергенція векторного поля дорівнює 0, тобто $\text{div}\,\vec{a}=0.$

Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається *безвихорним* або *потенціальним* в області $\overline{D}$, якщо у будь-якій точці цієї області вихор векторного поля дорівнює 0, тобто

$$\text{rot}\,\vec{a}(M)=0,\quad M\in\overline{D}.$$

Наприклад, поле електричної напруженості, яке утворюється точковим зарядом, є безвихорним у будь-якій області.

Поняття безвихорності та потенціальності поля є еквівалентними.

Векторне поле , яке є одночасно і потенціальним і соленоїдальним, називають *гармонічним.*

Приклад 7. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}=(3x-yz)\vec{i}+(3y-xz)\vec{j}+(3z-xy)\vec{k}$ потенціальним чи соленоїдальним.

Розв'язання.

Для цього знайдемо

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x - yz & 3y - xz & 3z - xy \end{vmatrix} = (-x + x)\,\vec{i} - (y - y)\,\vec{j} + (-z + z)\,\vec{k} = 0$$

Поле є потенціальним.

Поле є соленоїдальним, якщо div**a** = 0. Знайдемо div**a**

$$a_x = 3x - yz,\ a_y = 3y - xz,\ a_z = 3z - xy;$$

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 3 + 3 + 3 = 9,$$

тобто векторне поле не є соленоїдальним.

Запитання для самоперевірки

1. Що називають фізичним полем ?
2. Яке поле називають векторним ?
3. Якою формулою в тривимірному просторі визначається векторне поле ?
4. Записати рівняння векторних ліній .
5. Що характеризує потік векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхню σ?
6. Як визначають потік векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхню σ? Записати формулу.
7. Записати формулу Остроградського-Гаусса.
8. Що характеризує дивергенція векторного поля $\vec{a}(M)$?
9. За якою формулою обчислюють дивергенцію векторного поля $\vec{a}(M)$?
10. Що характеризує циркуляція C векторного поля $\vec{a}(M)$? Записати формулу Стокса.
11. Що називають вихором векторного поля $\vec{a}(M)$? За якою формулою визначають вихор векторного поля ?
12. Яке поле називають соленоїдальним ? потенціальним ? гармонічним ?

Навчальні завдання

41. Знайти векторні лінії заданого векторного поля:

а) $\vec{a}(M) = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k};$

б) $\vec{a}(M) = (y + z)\vec{i} - x\vec{j} - x\vec{k};$

в) $\vec{a}(M) = x(y^2 - z^2)\vec{i} - y(z^2 + x^2)\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}.$

42. Обчислити дивергенцію та вихор заданого поля:

а) $\vec{a}(M) = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + 5z\vec{k};$

б) $\vec{a}(M) = (y^2 + z^2)\vec{i} + (z^2 + x^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}.$

43. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ через зовнішню частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, відрізану площиною $z=2$, $(z \geq 2)$.

44. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = 2x\vec{i} + (1-2y)\vec{j} + 2z\vec{k}$ через замкнену поверхню, обмежену параболоїдом $x^2 + z^2 - 1 = 12y,\ (y \geq 0)$ і площиною $z = 0$.

45. Знайти циркуляцію вектора $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ по контуру L: $x^2 + y^2 = 4,\quad z = 0$, використовуючи теорему Стокса.

46. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a} = (2xy + z^2)\vec{i} + (2yz + x^2)\vec{j} + (2xz + y^2)\vec{k}$ потенціальним чи соленоїдальним.

Завдання для самостійної роботи

47. Знайти векторні лінії заданого векторного поля $\vec{a} = -2x\vec{i} + (2y+1)\vec{j} + 2\vec{k}$.

48. Обчислити дивергенцію та вихор заданого поля:

а) $\vec{a} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k};;$

б) $\vec{a} = x(y^2 - z^2)\vec{i} - y(x^2 + z^2)\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}.$

49. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = xyz\vec{i}$ через зовнішню сторону параболоїда $z = 1 - x^2 - y^2$, обмеженого площиною $z = 0,\quad (z \geq 0)$.

50. Знайти циркуляцію вектора $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} - z\vec{k}$ вздовж контуру L : $x^2 + y^2 = 16,\quad 3x + 4z = 1,$ використовуючи теорему Стокса.

51. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+x)\vec{k}$ потенціальним чи соленоїдальним.

Завдання для розрахункової індивідуальної самостійної роботи
Дидактичний модуль 5.
Інтегральне числення функції багатьох змінних.

1. Перейти від подвійного інтеграла $\iint\limits_{D} f(x;y)dxdy$ до повторного, де S – область обмежена лініями:

1

1) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;

2) $\begin{cases} xy \geq 6, \\ x + y \leq 7; \end{cases}$

3

3) $x + y \leq 1$, $x - y \leq 1$, $x \geq 0$;

4) $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

5

5) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$;

6) $y = \frac{7}{x}$, $x + y = 8$;

7

7) $x \geq 0$; $y = 2x + 1$, $x + y = 6$;

8) $y \geq x^2$, $y \leq 4 - x^2$;

9

9) $x = 0$, $y = 1$, $x - y + 6 = 0$;

10) $y = x$, $y = 2x$, $x + y = 6$;

1

11) $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$; $y \leq 0$;

12) $y \geq x^2 - 2$, $y \leq 6 - x^2$;

1

13) $y = \frac{6}{x}$, $x + y = -7$;

14) $x = 0$, $x - y - 2 = 0$, $x + y - 2 = 0$;

1

15) $\frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$; $y \geq 0$;

16) $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{3}x$;

1

17) $y = -x^2$, $y = -4$;

18) $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y = \frac{3}{4}x$;

1

19) $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$;

20) $x^2 + y^2 \leq 9$, $x \leq 0$; $y \geq 0$;

2

21) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \leq 1$;

22) $y = -\frac{6}{x}$, $y = x + 7$;

2

23) $y = \frac{4}{x}$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 8$;

24) $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x = 0$;

2

25) $y = -x^2 + 9$, $y = 0$;

26) $y = x^3$, $y = 7 - x^2$, $x = 0$;

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, якщо D – прямокутник :

) $\iint\limits_{D} (x - y)dxdy$, $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$;

) $\iint\limits_{D} \sqrt{xy}dxdy$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$;

) $\iint\limits_{D} \sqrt{x - y}dxdy$, $2 \leq x \leq 3$, $1 \leq y \leq 2$;

) $\iint\limits_{D} (x^2 - y)dxdy$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$;

) $\iint\limits_{D} (x^2 + y^2)dxdy$, $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 6$;

) $\iint\limits_{D} (x + y^2)dxdy$, $0 \leq x \leq 6$, $0 \leq y \leq 6$;

) $\iint\limits_{D} (xy^2)dxdy$, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$;

) $\iint\limits_{D} (x^2 y)dxdy$, $-2 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$;

) $\iint\limits_D (2x+1)y^2dxdy$, $0 \le x \le 1, -2 \le y \le 3$

0) $\iint\limits_D (5x^2y-3y)dxdy, 0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$;

1) $\iint\limits_D (x\sqrt{y}-x^2)dxdy, 0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 4$;

2) $\iint\limits_D \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)dxdy$, $1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 2$;

3) $\iint\limits_D (xe^y - y^2)dxdy$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$;

4) $\iint\limits_D (x\sqrt{x}+2y)dxdy, 0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 4$;

5) $\iint\limits_D (xe^{x+y})dxdy$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$;

6) $\iint\limits_D x^2\sqrt{2y+1}dxdy$, $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 4$;

7) $\iint\limits_D \cos xe^y dxdy$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y \le 1$;

8) $\iint\limits_D e^x(1+2y)dxdy$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 3$;

9) $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}, 0 \le y \le \frac{\pi}{4}$;

0) $\iint\limits_D (6x^2+4x)\sqrt{y}dxdy, 0 \le x \le 1$, $4 \le y \le 9$;

1) $\iint\limits_D (x+y+1)dxdy, 0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$;

2) $\iint\limits_D xydxdy, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$;

3) $\iint\limits_D (2x^2+y)dxdy, 0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$;

4) $\iint\limits_D (x^2-3y^2)dxdy$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$;

5) $\iint\limits_D (x^2-4y)dxdy$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 4$;

6) $\iint\limits_D (2x^2+5y)dxdy$, $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$;

3. Перейти до нових або полярних координат і обчислити інтеграли:

1. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, D – круг $x^2+y^2 \le R^2$.

2. $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy$, верхнє півкільце між колами з радіусами e і e^2 і центром у початку координат.

3. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, D – круг $x^2+y^2 \le 1$.

4. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, D – круг $x^2+y^2 \le 2ax$.

5. $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$, D – круг $x^2+y^2 \le ax$.

6. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, D – круг $x^2+(y+2)^2 \le 4$.

7. $\iint\limits_D ydxdy,$ верхній півкруг радіуса R з центром в точці (R, 0).

8. $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy,$ D – частина кільця $1 \le x^2 + y^2 \le 9,$ $\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3}.$

9. $\iint\limits_D x\sqrt{x^2 + y^2}dxdy,$ D – пелюстка лемніскати $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(x \ge 0).$

10. $\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy,$ D – круг $x^2 + y^2 \le Ry.$

11. $\iint\limits_D (h - 2x - 3y)dxdy,$ D – круг $x^2 + y^2 \le R^2.$

12. $\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy,$ D – круг $x^2 + y^2 \le Rx.$

13. $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy,$ D – частина кільця $1 \le x^2 + y^2 \le 4,$ $\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3}.$

14. $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy,$ D – пелюстка лемніскати Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(x \ge 0).$

15. $\iint\limits_D ydxdy,$ D – область, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ що лежить у 1-й чверті.

16. $\iint\limits_D \ln(1 + x^2 + y^2)dxdy,$ D – круг $x^2 + y^2 \le R^2.$

17. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)^4 dxdy,$ D – круг $x^2 + y^2 \le Rx.$

18. $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy,$ D – область, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$ що лежить у 1-й чверті.

19. $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy,$ D – область, обмежена колами $x^2 + y^2 = 2x,$ $x^2 + y^2 = 4x.$

20. $\iint\limits_D (1 - x^2 - y^2)^5 dxdy,$ D – область, обмежена колом $x^2 + y^2 = 1,$ що лежить у 1-й чверті.

21. $\iint\limits_D (1 + x^2 + y^2)^3 dxdy,$ D – область, обмежена колом $x^2 + y^2 = 1,$ що лежить над віссю *Ox*.

22. $\iint\limits_D \ln(1 + x^2 + y^2)dxdy,$ D – область, визначається нерівностями $1 \le x^2 + y^2 \le 4.$

23. $\iint\limits_D ydxdy,$ D – область, обмежена колом $x^2+y^2=1,$ що лежить у 1-й чверті.

24. $\iint\limits_D (6-2x-3y)dxdy,$ D – круг $x^2+y^2\le 9.$

25. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,$ D – круг $(x-4)^2+(y+2)^2\le 4.$

4. Обчислити потрійний інтеграл.

1. $\iiint\limits_G (x+y+z)dxdydz,$ G – область, обмежена площинами $x+y+z=a,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

2. $\iiint\limits_G xyzdxdydz,$ G – область, обмежена поверхнями $y=x^2,\quad z=xy,\quad y=0,\quad z=0.$

3. $\iiint\limits_G y\cos(x+z)dxdydz,$ G – область, обмежена циліндром $y=\sqrt{x}$ і площинами $x+z=\dfrac{\pi}{2}\quad y=0,\quad z=0.$

4. $\iiint\limits_G xdxdydz,$ G – область, обмежена циліндром $x^2+y^2=1$ і площинами $z=3,\quad z=0.$

5. $\iiint\limits_G (x^2+y^2)dxdydz,$ G – куб, $0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1,\quad 0\le z\le 1.$

6. $\iiint\limits_G (x+yz)dxdydz,$ G – прямокутний паралелепіпед $0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1,\quad 0\le z\le 2.$

7. $\iiint\limits_G (x-y)dxdydz,$ G – піраміда, утворена площинами $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y+z=1.$

8. $\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)dxdydz,$ G – прямокутний паралелепіпед $0\le x\le a,\quad 0\le y\le b,\quad 0\le z\le c.$

9. $\iiint\limits_G (1-y)dxdydz,$ область, обмежена площинами $z=1-x-y,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

10. $\iiint\limits_G xyzdxdydz,$ G – область, обмежена поверхнями $x^2+y^2+z^2=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

11. $\iiint\limits_G zdxdydz,$ G – область, обмежена поверхнями $z=1,\quad z=x^2+y^2.$

12. $\iiint\limits_G zdxdydz,$ G – область, що визначається нерівностями $0 \le x \le \frac{1}{2}, \quad x \le y \le 2x, \quad 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}.$

13. $\iiint\limits_G (2x+3y-z)dxdydz,$ обмежена площинами $z=a, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, x+y=b, (a \ge 0, b \ge 0).$

14. $\iiint\limits_G (x+y+1)dxdydz,$ G – область, обмежена поверхнями $x^2+y^2=z, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=1.$

15. $\iiint\limits_G xy^2z^3dxdydz,$ G – область, обмежена поверхнями $z=xy, \quad x=1, \quad y=x, \quad z=0.$

16. $\iiint\limits_G (1-y)dxdydz,$ G – область, що задовольняє умови $2az \ge x^2+y^2, \quad x^2+y^2+z^2 \le 3a^2.$

17. $\iiint\limits_G z^2dxdydz,$ G – область, що задовольняє умови $2Rz \ge x^2+y^2+z^2, \quad x^2+y^2+z^2 \le R^2.$

18. $\iiint\limits_G xyzdxdydz,$ G – область, що обмежена площиною $z=0$ і верхньою половиною еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

19. $\iiint\limits_G (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})dxdydz,$ G – область, що обмежена еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

20. $\iiint\limits_G xydxdydz,$ G – область, обмежена циліндром $x^2+y^2=1$ і площинами $z=3, \quad z=0.$

21. $\iiint\limits_G (x+y^2+1)dxdydz,$ G – область, обмежена поверхнями $x^2+y^2=z, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=1.$

22. $\iiint\limits_G (1-y)dxdydz,$ G – область, що задовольняє умови $2 \ge x^2+y^2, \quad x^2+y^2+z^2 \le 3.$

23. $\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)dxdydz,$ G – прямокутний паралелепіпед $0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 6, \quad 0 \le z \le 8.$

24. $\iiint\limits_G (3x+3y-2z)dxdydz,$ обмежена площинами $z=3, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, x+y=2.$

25. $\iiint\limits_G y\sin(x+z)dxdydz,$ G – область, обмежена циліндром $y=\sqrt{x}$ і площинами $x+z=\dfrac{\pi}{2} \quad y=0, \quad z=0.$

Завдання 5

1. Обчислити центр ваги сегмента еліпса $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, обмеженого прямою $3x+2y=6$.

2. Користуючись потрійним інтегралом, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$z=4-y^2, \quad z=y^2+2, \quad x=-1,\ x=2. \quad .$$

3. Обчислити центр ваги фігури, обмеженої віссю OX і параболою $y=2x-3x^2$.

4. Обчислити центр ваги плоского сегмента параболи $y^2=4x$, який відрізає пряма $x=4$.

5. Користуючись потрійним інтегралом, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$z=x^2+y^2, \quad z=x^2+2y^2, \quad y=x,\ y=2x .$$

6. Обчислити центр ваги фігури, обмеженої параболами $y^2=2x$, $x^2=2y$.

7. Обчислити центр ваги плоскої фігури, обмеженої лініями $y^2=2x, \quad y=x$.

8. Обчислити центр ваги плоскої фігури обмеженої лініями $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, \quad (x>0, y>0).$

9. Знайти момент інерції I_0 відносно початку координат сфери $x^2+y^2+z^2=4$.

10. Обчислити момент інерції відносно початку координат, фігури, обмеженої лініями $x^2=4y, \quad x=2, \quad y=0$.

11. Обчислити момент інерції I відносно оси OX фігури, обмеженої лініями $xy=4, \quad x=1, \quad y=1.$

12. Знайти момент інерції відносно осі OY плоскої фігури, обмеженої лініями: $xy=9, \quad x=1, \quad y=1.$

13. Користуючись потрійним інтегралом, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=3z^2$, $x+y=\frac{1}{3z^2}$ (об'єм тіла між конусами).

14. Обчислити центр ваги тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=4$, $x+y=2, z=4.$

15. Знайти центр ваги тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=z,\quad z=9$, $x>0$, $y>0$, $z>0.$

16. Обчислити центр ваги сегмента еліпса, обмеженого прямою: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\quad 3x+2y=6.$

17. Знайти момент інерції плоскої фігури, обмеженої лініями $y^2=2x,\quad y=x.$

18. Знайти центр ваги фігури, обмеженої лініями $y^2=x,\quad y^2=6-x.$

19. Знайти масу тіла, що лежить між сферами $x^2+y^2+z^2=1$ *і* $x^2+y^2+z^2=4$, якщо густина в кожній його точці обернено пропорційна віддалі до початку координат ($k-$коефіцієнт пропорційності).

20. Знайти центр ваги однорідного тіла, обмеженого поверхнями

$x^2+y^2=z,\quad z=9,\quad x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0.$

21. Знайти момент інерції I_y плоского тіла, обмеженого еліпсом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$

22. Знайти центр ваги сегмента, обмеженого еліпсом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ і прямою $4x+3y=12$.

23. Обчислити центр ваги фігури, обмеженої віссю OY і параболою $y^2=3+x.$

24. Користуючись потрійним інтегралом, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=3,\quad z=1.$

25. Користуючись подвійним інтегралом, обчислити площу фігури, обмежену лініями $x^2+y^2=2x,\quad y=x$ (площу меншої фігури).

6. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду:

1. $\int\limits_C \frac{xy}{\sqrt{1+4x}}dS$, де С – дуга кривої $y=1-\sqrt{x}$ при $1\leq x\leq 25$.

2. $\int\limits_C \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де С – відрізок прямої, що з'єднує точки 0(0; 0) і A(1; 2).

3. $\int\limits_C y^2 dS$, де C – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

4. $\int\limits_C y\sqrt{1+x}dS$, де C – дуга кривої $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ між точками з абсцисами $x_1 = 0$ і $x_2 = 9$.

5. $\int\limits_C (x+y)dS$, де C – відрізок прямої $y = 2x - 1$ при $-1 \le x \le 2$.

6. $\int\limits_C xdS$, де C – дуга параболи $y = \frac{1}{2}x^2$ при $0 \le x \le 6$.

7. $\int\limits_C x^2y^2dS$, де C – коло $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

8. $\int\limits_C arctg\frac{y}{x}dS$, де C – дуга кардіоїди $r = a(1 + \cos t)$ при $0 \le t \le 2\pi$.

9. $\int\limits_C x^2dS$, де C – дуга півкубічної параболи $y = x\sqrt{x}$ при $1 \le x \le 4$.

10. $\int\limits_C xdS$, де C – півколо $x^2 + y^2 = 4$, $y \ge 0$.

11. $\int\limits_C ydS$, де C – півколо $x^2 + y^2 = 9$, $x \ge 0$.

12. $\int\limits_C \frac{1}{25}y^2dS$, де C – чверть кола $x^2 + y^2 = 25$, що знаходиться у першому координатному куті.

13. $\int\limits_C (2x+3y)dS$, де C – дуга параболи $y = 2\sqrt{x}$ при $1 \le x \le 36$.

14. $\int\limits_C \sqrt{1+y^2}dS$, де C – дуга кривої $y = e^x$ при $0 \le x \le 1$.

15. $\int\limits_C \frac{xy}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dS$, де C – дуга косинусоїди $y = \cos x$ при $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

16. $\int\limits_C y^2dS$, де C – половина арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le \pi$

17. $\int\limits_C y\sqrt{36+x^4}dS$, де C – дуга кривої $xy = 6$ при $1 \le x \le 3$.

18. $\int\limits_C x^3y\sqrt{1+x^2}dS$, де C – дуга кривої $y = \ln x$ при $1 \le x \le e$.

19. $\int\limits_C \frac{xy}{\sqrt{1+e^{2x}}}dS$, де C – дуга кривої $y = e^x$ при $0 \le x \le 1$.

20. $\int\limits_C \sqrt{1+4e^{2x}}dS$, де C – дуга кривої $y = e^{2x}$ при $-1 \le x \le 0$.

21. $\int\limits_C \frac{x^5 y}{\sqrt{1+x^2}}dS$, де C – дуга кривої $y = \ln x$ при $1 \le x \le \sqrt{e}$.

22. $\int\limits_C xdS$, де C – дуга кривої $y = \frac{1}{x}$ при $1 \le x \le \sqrt{3}$.

23. $\int\limits_C \frac{1}{64}x^2 dS$, де C – чверть кола $x^2 + y^2 = 64$ при $x \le 0$, $y \ge 0$.

24. $\int\limits_C \sqrt{1+\sin^2 2x}dS$, де C – дуга кривої $y = \sin^2 x$ при $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

25. $\int\limits_C \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{4+x^2}}dS$, де C – дуга кривої $y = 2\ln x$ при $1 \le x \le e^2$.

7. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду:

1. $\int\limits_L xy^2dx - x^2ydy$, де L – відрізок прямої $y = 2x + 1$ від точки (–1; –1) до точки (0; 1).

2. $\int\limits_L (2x+3y)dx + xdy$, де L – дуга кривої $y = 2x^2$ від точки (–1; 2) до точки (1; 2).

3. $\int\limits_L \ln ydx + x^5dy$, де L – дуга кривої $y = x^3$ від точки (1; 1) до точки (2; 8).

4. $\int\limits_L \frac{x}{y}dx + x^2dy$, де L – дуга кривої $y = x^4$ від точки (1; 1) до точки (2; 16).

5. $\int\limits_L x\sqrt{y}dx + (x+1)dy$, де L – дуга кривої $y = e^{2x}$ від точки (0; 1) до точки (1; e^2).

6. $\int\limits_L (x^2+\sqrt{y})dx - 2xdy$, де L – відрізок прямої $2x + 3y = 12$ від точки (6; 0) до точки (0; 4).

7. $\int\limits_L (x-y)dx + 4xdy$, де L – дуга кривої $xy = 1$ від точки (1; 1) до точки (2; $\frac{1}{2}$).

8. $\int\limits_L 3ydx - 2xdy$, де L – дуга кривої $y = \arccos x$ від точки (0; $\frac{\pi}{2}$) до точки ($\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{3}$).

9. $\int\limits_L ydx + xdy$, де L – дуга кривої $y = \arcsin x$ від точки (0; 0) до точки (1; $\frac{\pi}{2}$).

10. $\int\limits_L (x^2 + y)dx - 3xydy$, де L – дуга кривої $y = x^3 - x^2$ від точки (0; 0) до точки (1; 0).

11. $\int\limits_L 2ydx + x^2dy$, де L – дуга параболи $y = -x^2 + 2x$ від точки (0; 0) до точки (2; 0).

12. $\int\limits_L y^3dx + x^3dy$, де L – дуга кривої $y = 2\sqrt[3]{x}$ від точки (–1; –2) до точки (0; 0).

13. $\int\limits_L \sqrt{x+y}dx - e^x dy$, де L – дуга кривої $y = x^2$ від точки (0; 0) до точки (1; 1).

14. $\int\limits_L ydx + 7xdy$, де L – дуга кривої $y = \ln x$ від точки (1; 0) до точки (e; 1).

15. $\int\limits_L ydx - 2(x+y)dy$, де L – дуга кривої $y^2 = x$ від точки (0; 0) до точки (1; 1).

16. $\int\limits_L \cos ydx - 2x\sin ydy$, де L – відрізок прямої $y = 2x$ від точки (0; 0) до точки ($\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$).

17. $\int\limits_L 2xydx + x^2dy$, де L – дуга кривої $y = \sqrt[3]{x^2}$ від точки (0; 0) до точки (8; 4).

18. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + \frac{x}{y}dy$, де L – дуга кривої $xy = 4$ від точки (1; 4) до точки (4; 1).

19. $\int\limits_L \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy$, де L – дуга кривої $y = x^4$ від точки (1; 1) до точки (2; 16).

20. $\int\limits_L ydx + 4xdy$, де L – дуга кривої $y = arctgx$ від точки (0; 0) до точки (1; $\frac{\pi}{4}$).

21. $\int\limits_L xydx + xdy,$ де L – дуга кривої $y = \sin x$ від точки (0; 0) до точки ($\frac{\pi}{2}$; 1).

22. $\int\limits_L y^2dx - \sqrt{x}dy,$ де L – дуга кривої $y = \sqrt{x}$ від точки (0; 0) до точки (9; 3).

23. $\oint\limits_L y^2dx - xydy$, де L – контур трикутника O(0; 0), A(1; 3), B(3; 1) (обхід здійснюється проти руху стрілки годинника).

24. $\int\limits_L 2ydx + xdy$, де L – дуга кривої $y = \frac{6}{x}$ від точки (1; 6) до точки (6; 1).

25. $\int\limits_L (x+y)dx - dy,$ де L – дуга кривої $y = e^x$ від точки (0; 1) до точки (1; e).

8. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду:

1. $\iint\limits_\sigma (2x + y + z - 1)d\sigma,$ де σ – частина площини $3x + y + z = 1,$ розміщена в першому октанті.

2. $\iint\limits_\sigma \frac{1}{(1+x+z)^2}d\sigma,$ де σ – частина площини $x + y + z = 1,$ розміщена в першому октанті.

3. $\iint\limits_\sigma (2x + \frac{3}{4}y + z)d\sigma,$ де σ – частина площини $6x + 4y + 3z = 12,$ розміщена в першому октанті.

4. $\iint\limits_\sigma x^2yzd\sigma,$ де σ – частина площини $x + y + z = 1,$ розміщена в першому октанті.

5. $\iint\limits_\sigma \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}d\sigma,$ де σ – півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$

6. $\iint\limits_\sigma xd\sigma,$ де σ – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$ розміщена в першому октанті.

7. $\iint\limits_\sigma xd\sigma,$ де σ – півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$

8. $\iint\limits_\sigma yd\sigma,$ де σ – півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$

9. $\iint\limits_\sigma x^2y^2d\sigma,$ де σ – півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$

10. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)d\sigma,$ де σ – сфера $x^2+y^2+z^2=R^2.$

11. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)d\sigma,$ де σ – частина конічної поверхні $x^2+y^2=z^2,$ розміщена між площинами $z=0,\quad z=1.$.

12. $\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{r^2},$ де σ – частина циліндричної поверхні $x^2+y^2=R^2,$ розміщена між площинами $z=0,\quad z=h$, а r – відстань від точки поверхні до початку координат.

13. $\iint\limits_{\sigma}(-3x+2y+z-1)d\sigma,$ де σ – частина площини $3x+3y+z=1,$ розміщена в першому октанті.

14. $\iint\limits_{\sigma}(2x+\frac{3}{4}y+z)d\sigma,$ де σ – частина площини $x+y+z=1,$ розміщена в першому октанті.

15. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)d\sigma,$ де σ – частина конічної поверхні $x^2+y^2=z^2,$ розміщена між площинами $z=1,\quad z=2.$.

16. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+2y^2+z)d\sigma,$ де σ – частина площини $x+y+z=12,$ розміщена в першому октанті.

17. $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma,$ де σ – бічна поверхня конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{b^2}\quad 0\le z\le b.$.

18. $\iint\limits_{\sigma}x^2y^2d\sigma,$ де σ – поверхня, обмежена частиною параболоїда $x^2+y^2=2z^2$ та площиною $z=3.$

19. $\iint\limits_{\sigma}(2x^2-2y^2+4z)d\sigma,$ де σ – частина площини $x+y+z=2,$ розміщена в першому октанті.

20. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z)d\sigma,$ де σ – поверхня, обмежена частиною параболоїда $x^2+y^2=2z^2$ та площиною $z=3.$.

21. $\iint\limits_{\sigma}(x+2y+4z-1)d\sigma,$ де σ – частина площини $x+y+2z=1,$ розміщена в першому октанті.

22. $\iint\limits_{\sigma}(2x^2+y^2+z)d\sigma,$ де σ – поверхня, обмежена частиною параболоїда $x^2+y^2=3z^2$ та площиною $z=1.$

23. $\iint\limits_{\sigma}(2x+y+z-1)d\sigma,$ де σ – частина площини $3x+y+z=1,$ розміщена в першому октанті.

24. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)d\sigma,$ де σ – півсфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

9. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду:

1. $\iint\limits_{\sigma} xdxdz,$ де σ – зовнішня сторона поверхні трикутника, утвореного перетином площини $x-y+z=1$ з координатними площинами.

2. $\iint\limits_{\sigma} yxdydz,$ де σ – зовнішня сторона поверхні трикутника, утвореного перетином площини $x-y+z=1$ з координатними площинами.

3. $\iint\limits_{\sigma} xz^2dxdz,$ де σ – зовнішня сторона частини сфери $x^2+y^2+z^2=1,$ розміщена в першому октанті.

4. $\iint\limits_{\sigma} x^2zdxdz,$ де σ – зовнішня сторона частини сфери $x^2+y^2+z^2=1,$ розміщена в першому октанті.

5. $\iint\limits_{\sigma} 2xdydz-ydxdz,$ де σ – зовнішня сторона частини поверхні циліндра $x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0.$

6. $\iint\limits_{\sigma} yzdydz+xzdxdz+xydxdy,$ де σ – зовнішня сторона поверхні трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=2$ з координатними площинами.

7. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{S} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, де S – зовнішня частина сфери $x^2+y^2+z^2=9.$

8. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{S}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$ де S – зовнішня поверхня конуса $x^2+y^2=z^2\quad(0\le z\le 2)$.

9. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{S} xdydz+ydzdx+zdxdy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=1$.

10. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{S} yzdxdy+xzdydz+xydxdz$, де S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=1$, яка лежить в першому октанті.

11. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{S} zdxdy$, де S – зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1$.

12. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_S z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона еліпсоїда $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{1}=1$.

13. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, де S – зовнішня сторона куба, утвореного координатними площинами та площинами *x=1, y=1, z=1.*

14. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона півсфери $x^2+y^2+z^2=4$.

15. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_S yzdydz+xzdxdz+xydxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні тетраедра, обмеженого площинами $z=0$, $x=0, x+y+z=1$.

16. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_S zdxdy$, де S – зовнішня сторона еліпсоїда $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{1}=1$.

17. $\iint\limits_\sigma \dfrac{x^2}{z}dxdy,$ де σ – зовнішня сторона частини сфери $x^2+y^2+z^2=1$, розміщена в першому октанті.

18. $\iint\limits_\sigma \dfrac{x^2y^2}{z^2}dxdy,$ де σ – зовнішня поверхня конуса $x^2+y^2=z^2 \quad (0\le z\le 2)$.

19. $\iint\limits_\sigma \dfrac{x^2}{z}dxdy,$ де σ – верхня сторона нижньої півсфери радіуса *R*.

20. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_S dydz+dxdz+dxdy,$ де S – зовнішня сторона куба, утвореного координатними площинами та площинами *x=1, y=1, z=1.*

21. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_S xdzdy$, де S – зовнішня сторона еліпсоїда $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{1}=1$.

22. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_S (1-z)dydz+(1-x)dzdx+(1-y)dxdy$ де S – зовнішня поверхня конуса $x^2+y^2=z^2 \quad (0\le z\le 3)$.

23. $\iint\limits_\sigma xz^2dxdz,$ де σ – зовнішня сторона частини сфери $x^2+y^2+z^2=1$, розміщена в першому октанті.

24. $\iint\limits_{\sigma} ydydz,$ де σ – зовнішня сторона поверхні трикутника, утвореного перетином площини $x - y + z = 1$ з координатними площинами.

25. $\iint\limits_{\sigma} xdydz - 2ydxdz,$ де σ – зовнішня сторона частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 1, \; 0 \le z \le 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$

Завдання 10.

1. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = xyz\vec{i}$ через зовнішню сторону параболоїда $z = 1 - x^2 - y^2$, обмеженого площиною $z = 0, \quad (z \ge 0)$.

2. Знайти циркуляцію вектора $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} - z\vec{k}$ вздовж контуру L $x^2 + y^2 = 16, \quad 3x + 4z = 1,$ використовуючи теорему Стокса.

3. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$ через зовнішню сторону параболоїда $x^2 + y^2 = 9 - z,$ розташованого в першому октанті .

4. Знайти циркуляцію вектора $\vec{a} = z^2\vec{i} - x^2\vec{k}$ вздовж контуру L $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z \ge 0$ використовуючи теорему Стокса.

5. Знайти потік векторного поля: $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} + e^z\vec{k}.$

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}$ через частину лощини $z = 0,$ обмежену колом $x^2 + y^2 = 1,$ в напрямку орта $\vec{k}$.

7. Знайти циркуляцію вектора $\vec{a} = z^2\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k}$ вздовж контуру L $x^2 + y^2 + z^2 = 32, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z \ge 0$, використовуючи теорему Стокса.

8. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} - x\vec{j} - y\vec{k}$ через повну поверхню конуса $x^2 + y^2 = z^2,$ обмеженого площиною $z = 1 \quad (0 \le z \le 1).$

9. Знайти циркуляцію вектора $\vec{a} = y\vec{i} - xj + x\vec{k}$ вздовж контуру L $z = x^2 + y^2, \quad z = 4,$ використовуючи теорему Стокса.

10. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = 2x\vec{i} + (1 - 2y)\vec{j} + 2z\vec{k}$ через замкнену поверхню, обмежену параболоїдом $x^2 + z^2 - 1 = 12y, \; (y \ge 0)$ і площиною $z = 0$.

11. Знайти циркуляцію вектора $\vec{a} = y^2\vec{i} + z^2 j$ вздовж контуру L $x^2 + y^2 = 16, \quad 3x + 4z = 10,$ використовуючи теорему Стокса.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2 j + z^2\vec{k}$ через повну поверхню піраміди, обмежену площинами $y + x + z = 1, \quad x = 0, \; y = 0, \; z = 0$.

13. Знайти циркуляцію вектора $\vec{a} = z^2 y\vec{i} + x^2 z\vec{k}$ вздовж контуру $y^2 + x^2 + z^2 = 16, \; z = 0, x = 0, y = 0,$ використовуючи теорему Стокса.

14. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + yj + z\vec{k}$ через сферу $y^2 + x^2 + z^2 = 4$.

15. Знайти циркуляцію вектора $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ вздовж контуру $y + x + 2z = 2,\ z = 0,\ x = 0,\ y = 0,$ використовуючи теорему Стокса.

16. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} + xzj + xy\vec{k}$ через зовнішню сторону частини сфери S: $y^2 + x^2 + z^2 = 4,$ розташовану в першому октанті.

17. Знайти циркуляцію вектора $\vec{a} = 2xz\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ вздовж контуру $y^2 + x^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0,$ використовуючи теорему Стокса.

18. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} - y^2 j + 2\vec{k}$ через замкнену поверхню S: $y^2 = x^2 + z^2, \quad y = 1,\ y \geq 0.$

19. Знайти циркуляцію вектора $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}$ вздовж кола $(x-2)^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$.

20. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + zx\vec{j} + y\vec{k}$ через замкнену поверхню S: $x^2 + y^2 = 4 - z$, обмежену площиною $z = 0, (z \geq 0)$.

21. Знайти циркуляцію вектора $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ по контуру L: $z = x^2 + y^2,\ z = 1$, використовуючи теорему Стокса.

22. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} - y^2 j + 2\vec{k}$ через замкнену поверхню S: $y^2 = x^2 + z^2, \quad y = 1,\ y \geq 0.$

23. Знайти циркуляцію вектора $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}$ вздовж кола $(x-2)^2 + y^2 = 1, \quad z = 0.$

24. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ через замкнену поверхню S: $z^2 = x^2 + y^2,\ z = x^2 + y^2$.

25. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = 2xi - (z-1)\vec{k}$ через замкнену поверхню $x^2 + y^2 = 4$, обмежену площинами $z = 0, z = 1.$

Довідниковий матеріал

1. Таблиця похідних елементарних функцій

	Функція	Похідна
.	Степенева	1) $C' = 0$ 2) $(x)' = 1$ 3) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ 4) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
.	Показникові	5) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$ 6) $\left(e^x\right)' = e^x$
.	Логарифмічні	7) $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$ 8) $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$
.	Тригонометричні	9) $\left(\sin x\right)' = \cos x$ 10) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$ 11) $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ 12) $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

.	Обернені тригонометричні	13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 15) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ 16) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2. Таблиця елементарних інтегралів

.	$\int 0dx = 0$	.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
.	$\int 1dx = x + C$	0.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
.	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq 1$	1.	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	2.	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	3.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
.	$\int e^x dx = e^x + C$	4.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
.	$\int sinxdx = - cosx + C$	5.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm b}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm b}\right\| + C$
.	$\int cosxdx = sinx + C$	6.	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$

Найпростіші властивості невизначеного інтеграла

1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

2) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Методи інтегрування

1. Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

а) $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$ б) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b)+C$

2. Заміна змінної $\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt}$ - загальна формула.

а) $\int R(\ln x)\frac{dx}{x} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right\} = \int R(t)dt$; б) $\int R(\mathrm{arctg}x)\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \mathrm{arctg}x = t \\ \frac{dx}{1+x^2} = dt \end{matrix} \right\} = \int R(t)dt$;

в) $\int R(\arcsin x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \arcsin x = t \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt \end{matrix} \right\} = \int R(t)dt$ г) $\int R\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = a\sin t \text{ или } x = a\cos t \\ dx = a\cos t dt \quad dx = -a\sin t dt \end{matrix} \right\}$

3. Інтегрування частинами $\int U\cdot dV = U\cdot V - \int V\cdot dU$.

а) $\int \underbrace{P_n(x)}_{U}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \mathrm{tg}x \\ \mathrm{ctg}x \\ e^x \end{bmatrix} dx}_{dV}$ б) $\int \underbrace{\begin{bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \mathrm{arctg}x \\ \mathrm{arcctg}x \end{bmatrix}}_{U}\cdot\underbrace{P_n(x)dx}_{dV}$

Властивості логарифмів

1. $\ln a + \ln b = \ln(ab)$
2. $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$
3. $n\ln a = \ln(a)^n$
4. $\ln 1 = 0$

Значення тригонометричних функцій деяких кутів

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**
$\cos\alpha$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	**-1**
$tg\alpha$	**0**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**1**	$\sqrt{3}$	***Не існує***	**0**
$ctg\alpha$	***Не існує***	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**0**	***Не існує***

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика: Підручник: У 2 кн.– 2-ге вид., перероб. і доп.– К.: Либідь, 2003.– Кн..1 Основні розділи / Г.Й. Призва, В.В. Плахотник, Л.Д. Гординський та ін.; За ред.. Г.Л.Куляніча.–400с.
2. Вища математика: Підручник: У 2 кн.– 2-ге вид., перероб. і доп.– К.: Либідь, 2003.– Кн..1 Основні розділи / Г.Л.Куляніч, Є.Ю.Таран, В.М.Бурим та ін.; За ред.. Г.Л.Куляніча.–368с.
3. Дубовик В.П., Юрик 1.1., Вища математика: Навч. посібник. - К.: А.С.К., 2005.– 648 с.
4. Дюженкова Л.І. Дюженкова О.Ю. Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002.– 624с. (Альма-матер)
5. В.П.Лавренчук, Т.І.Готинчан, В.С. Дронь, О.С. Кондур. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, Математичний аналіз: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2007.– 440с.
6. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: Навч. посібник. У 2-х ч - К.:КНЕУ, 2001.
7. Вища математика: Навч.-метод, посіб. для самост. вивч. дисципліни / К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова, О.І. Лютий, О.І Макаренко, В.Г. Овсієнко. - К.: КНЕУ, 1999.– 396 с.
8. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / За ред. В.П.Дубовика, І.І.Юрика.– К.: Видавництво А.С.К., 2003.–480с.
9. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика. Загальний курс. Збірник задач та вправ. - Х.: Рубікон, 1999.
10. Неміш В.М., Процик А.І., Березька К.М. Вища математика (практикум): Навч. посіб. - Тернопіль: Економічна думка, 2001.
11. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов. 6-е изд. - М.: Наука, 1986. - 576 с.
12. Лубенська Т. В., Чупаха Л. Д. Вища математика в таблицях: Довідник / Міжрег. акад. упр. персоналом. – К.: МАУП, 1999. – 85 с.
13. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. 10-е изд. - М.: Наука, 1969. - 352 с.
14. Шнейдер В. А., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики. - М.: Высшая школа, 1975.
15. Пискунов Н.С. Дифференциальное исчисление. -М: Наука, 1978.
16. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика: Елементи аналітичної геометрії. Диференційне та інтегральне числення функцій однієї змінної. - К.: Вища шк. 1984-С.391
17. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. 2. Диференційне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. - К.: Либідь 1994-с.352

З М І С Т

Підписано до друку 22.03.2010 р.
Ум. друк. арк.4,15.
Зам. № 97. Тираж 300 прим.

20300, Умань, вул. Піонтковського, 8
КопіЦентр

Література

1. Березовський В.Є., Закорчевна С.А., Труш Т.І. Інтегральне числення. Методичні вказівки. – Умань: УНУС, 2011. – С.76.
2. Гудименко Ф.С., Вища математика. Підручник. – Видавництво Київського університету, - 1964. – С.380.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І., Вища математика. Збірник задач. – К.: А.С.К., - 2003. - С.480.
4. Каплан И.А., Практические занятия по высшей математике. – Х.: Издательство государственного университета им. А.М. Горького, - 1967. – С. 945.
5. Кривуца В.І., Барковський В.В.,Барковська Н.В., Вища математика. Практикум. – К.: ЦНЛ, - 2005. – С.535.
6. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П., Краткий курс высшей математики. Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, - 1978. – С.624.
7. Лиман Ф.М., Власенко В.Ф. і др., Вища математика. Навчальний посібник. – Суми, Університетська книга, - 2006. - С.615.
8. Минорский В.П., Сборник задач по высшей математике. Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, - 1969. – С.352.
9. Труш Т.І., Закорчевна С.А., Під ред.. Березовського В.Є., Функції декількох змінних. Методичні вказівки. – Умань: УДАУ, - 2010. – С.75.
10. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П., Краткий курс высшей математики. Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, - 1978. – С.624.

Методичні рекомендації для проведення практичних занять з вищої математики по модулю ” Інтегральне числення функції багатьох змінних ” // В.Є. Березовськй, С.А. Закорчевна Р.В. Ненька.– Умань: УНУС, 2011. – с.78.

Підписано до друку 30.08.2011 р.
Ум. друк. арк. 4.
Зам. № 214. Тираж 300 прим.

20300, Умань, вул. Піонковського, 8
КопіЦентр