МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УМАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ САДІВНИЦТВА

Кафедра математики і фізики

вища математика

частина II

Конспект лекцій

2024

Курс лекцій з навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів першого рівня вищої освіти (бакалаврський) спеціальності 193 Геодезія та землеустрій освітньої програми Геодезія та землеустрій. – Умань: Уманський НУС, 2024. - 165 с.

Розробник: Іван ПОБЕРЕЖЕЦЬ кандидат технічних наук, доцент
___________________(Іван ПОБЕРЕЖЕЦЬ)

Курс лекцій затверджений на засіданні кафедри математики і фізики.
Протокол від “__08__”____08_______2024 року № __1_
Завідувач кафедри ______________(Леонід КОВАЛЬОВ)
“_____”___________________ 2024 року

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА

В другій частині навчально-методичного посібника продовжено новий підхід до структурування і викладу змісту курсу вищої математики на принципах модульно-рейтингової системи навчання.

Посібник містить короткі теоретичні відомості з таких розділів дисципліни «Вища математика»:

- інтегральне числення функцій однієї змінної;
- визначеніий інтеграл;
- диференціальне числення функцій декількох змінних;
- інтегральне числення функцій декількох змінної
- диференціальні рівняння
- ряди.

Методичний посібник дає змогу студентам оволодіти прийомами й методами розв’язування задач та прикладів при вивченні вищої математики.

Посібник створений для успішного засвоєння основних математичних понять, та вмінням студентів застосовувати отримані знання до розв’язку задач з конкретним фізичним і геометричним змістом. Він містить типові приклади, розв'язані з детальними поясненнями, довідниковий матеріал, а також завдання для самостійної роботи студентів.

Методика і форма викладання матеріалу в посібнику сприяють індивідуалізації навчального процесу і якісному засвоєнню навчальної програми.

Посібник розрахований на студентів інженерно-технологічного факультету.

Глава 6
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§ 1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Поняття первісної та невизначеного інтегралу

Інтегральне числення виникло із потреби створити загальний метод обчислення площ, об'ємів та центрів маси. Основним завданням інтегрального числення є відшукання функції, якщо відома її похідна.

Фунцію $F(x)$ називають *первісною* функції $f(x)$ на даному проміжку, якщо в кожній точці цього проміжку виконується рівність

$$F'(x) = f(x),$$

або

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Так, наприклад, функція $F(x)=\sin x$ є первісною на всій осі Ox для функції $f(x) = \cos x$, тому що для будь-якого x

$(\sin x)' = \cos x$. Але $(\sin x + 5)' = \cos x$ і $(\sin x + C)' = \cos x$.

Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то будь-яка інша первісна для $F(x)$ (на тому ж проміжку) може бути записана у вигляді $F(x)+C$, де C – деяке число.

Сукупність всіх первісних до функції $f(x)$ на даному проміжку називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ та позначають

$$\int f(x)dx.$$

Знак $\int$ є знаком інтегралу,

$f(x)$ – підінтегральна функція,

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Отже,

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C,}$$

де $F(x)$ – первісна до $f(x)$, а C – довільна стала.

Відшукання первісної і невизначеного інтеграла від даної функції $f(x)$, називають *інтегруванням цієї функції*. Інтегрування являє собою операцію, зворотну диференціюванню. Для того, щоб перевірити, чи правильно виконане інтегрування, досить продиференціювати результат і одержати при цьому підінтегральну функцію.

Наприклад, $\int e^{-2x}dx = -0{,}5e^{-2x} + C$, так як $\left(-0{,}5e^{-2x} + C\right)' = e^{-2x}$.

Зауваження. Рівність інтегралів завжди потрібно розуміти з точністю до сталого доданку.

1.2. Найпростіші властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Невизначений інтеграл від похідної дорівнює сумі функції та довільної сталої C:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

4. Невизначений інтеграл від диференціала дорівнює сумі функції, яка диференціюється та довільної сталої C:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

5. Постійний множник k ($k \neq 0$) можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

6. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми (різниці) двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі (різниці) інтегралів від цих функцій (якщо кожний з них існує)

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Примітка. Властивості 5 і 6 називаються лінійними властивостями невизначених інтегралів і поширюються на будь-яке число доданків

$$\int (A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots + A_n f(x))dx = A_1\int f_1(x)dx + A_2\int f_2(x)dx + \ldots + A_n\int f_n(x)dx.$$

1.3. Таблиця невизначених інтегралів

1.	$\int 0dx = C$;	8.	$\int dx = x + C$;
2.	$\int x^{\alpha}\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{x}^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$;	9.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;
3.	$\int e^x dx = e^x + C$;	10.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$;
4.	$\int \cos x dx = \sin x + C$;	11.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$;
5.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;	12.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;
6.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$;	13.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$;
7.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$;	14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$.

Інтеграл не від всякої елементарної функції виражається в елементарних функціях. Наприклад, інтеграли $\int e^{-x^2}dx$ і $\int \cos x^2 dx$ не виражаються в елементарних функціях і оскільки вони застосовуються досить часто, то для них складені таблиці значень.

1.4. Метод розбиття

Безпосереднє інтегрування базується на прямому використанні таблиці та лінійних властивостей невизначених інтегралів.

Приклад 1. Знайти інтеграли: *а*) $\int 7dx$; *б*) $\int \frac{9}{x}dx$; *в*) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$; *г*) $\int \frac{6dx}{121+x^2}$.

Розв`язання. *а*) На основі властивості 5 сталий множник 7 винесемо за знак інтеграла і, використовуючи табличний інтеграл 2, отримаємо

$$\int 7dx = 7\int dx = 7x + C.$$

б) Використовуючи властивість 5 і табличний інтеграл 6 маємо

$$\int \frac{9}{x}dx = 9\int \frac{dx}{x} = 9\ln|x| + C.$$

в) Використовуючи табличний інтеграл 13 одержуємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{6} + C.$$

г) Для обчислення цього інтеграла застосуємо властивість 5 та табличний інтеграл 11

$$\int \frac{6dx}{121+x^2} = 6\int \frac{dx}{11^2+x^2} = \frac{6}{11} arctg\frac{x}{11} + C.$$

При застосуванні метода розбиття можуть виникнути такі ситуації:

а) даний інтеграл після застосування властивостей 5 і 6 приводиться до табличних інтегралів;

б) даний інтеграл після елементарних тотожних перетворень над підінтегральною функцією і застосування властивостей 5 і 6 приводиться до одного чи декількох табличних інтегралів.

Приклад 2. Знайти наступні інтеграли і результат інтегрування перевірити диференціюванням:

а) $\int (3x^2 - 5\cdot 2^x + 4\cos x)dx$; *б*) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}$; *в*) $\int \frac{x^4 - x\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}dx$;

г) $\int \frac{x^2}{x^2-5}dx$; *д*) $\int \frac{1+2\sin^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

Розв`язання. *а*) Застосувавши властивості 5 і 6, маємо

$$\int (3x^2 - 5\cdot 2^x + 4\cos x)dx = 3\int x^2dx - 5\int 2^x dx + 4\int \cos x dx.$$

Використовуємо тепер формули 3, 4 і 7 і знайдемо

$$3\int x^2dx = 3\frac{x^{2+1}}{2+1} + C_1 = x^3 + C_1;$$

$$5\int 2^x dx = 5\frac{2^x}{\ln 2} + C_2;$$

$$4\int \cos x dx = 4\sin x + C_3.$$

Отже,

$$\int (3x^2-5\cdot 2^x+4\cos x)dx = x^3-5\frac{2^x}{\ln 2}+4\sin x+C.$$

Перевіримо отриманий результат

$$\left(x^3-5\frac{2^x}{\ln 2}+4\sin x+C\right)' = 3x^2-\frac{5}{\ln 2}\cdot 2^x\ln 2+4\cos x = 3x^2-5\cdot 2^x+4\cos x.$$

Ми одержали підінтегральну функцію.

Отже, інтегрування виконане вірно.

б) Оскільки коефіцієнт біля x^2 не дозволяє безпосередньо застосувати формулу 8, то винесемо множник *9* з під знака кореня і за знак інтеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{27-9x^2}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

Перевірка: $\left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3-x^2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{27-9x^2}}.$

в) Спростимо спочатку підінтегральну функцію, застосувавши властивості степенів $x^n\cdot x^m = x^{n+m}$; $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$; $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.

$$\frac{x^4-x\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^4}{x^{\frac{1}{3}}}-\frac{x\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{4-\frac{1}{3}}-x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{11}{3}}-x^{\frac{7}{6}}+x^{\frac{5}{12}}.$$

Після спрощення маємо

$$\int \frac{x^4-x\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\left(x^{\frac{11}{3}}-x^{\frac{7}{6}}+x^{\frac{5}{12}}\right)dx = \int x^{\frac{11}{3}}dx-\int x^{\frac{7}{6}}dx+\int x^{\frac{5}{12}}dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{11}{3}+1}}{\frac{11}{3}+1}-\frac{x^{\frac{7}{6}+1}}{\frac{7}{6}+1}+\frac{x^{\frac{5}{12}+1}}{\frac{5}{12}+1}+C = \frac{3}{14}x^{\frac{14}{3}}-\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}+\frac{12}{17}x^{\frac{17}{12}}+C = \frac{3}{14}x^4\sqrt[3]{x^2}-\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{12}{17}x\sqrt[12]{x^5}+C$$

Перевірка:

$$\left(\frac{3}{14}x^4\sqrt[3]{x^2}-\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{12}{17}x\sqrt[12]{x^5}+C\right)' = \left(\frac{3}{14}x^{\frac{14}{3}}-\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}+\frac{12}{17}x^{\frac{17}{12}}+C\right)' = \frac{3}{14}\cdot\frac{14}{3}x^{\frac{11}{3}}-\frac{6}{13}\cdot\frac{13}{6}x^{\frac{7}{6}}+$$

$$+\frac{12}{17}\cdot\frac{17}{12}x^{\frac{5}{12}} = x^3\sqrt[3]{x^2}-x\sqrt[6]{x}+\sqrt[12]{x^5} = \frac{x^3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x}-x\sqrt[6]{x}\sqrt[3]{x}+\sqrt[12]{x^5}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^4-x\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}$$

г) Розіб`ємо підінтегральний дріб на два доданки, інтеграли від яких відомі

$$\int \frac{x^2}{x^2-5}dx = \int \frac{x^2-5+5}{x^2-5}dx = \int\left(1+\frac{5}{x^2-5}\right)dx = \int dx+5\int\frac{dx}{x^2-5} = x+\frac{\sqrt{5}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C.$$

Перевірка:

$$\left(x+\frac{\sqrt5}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt5}{x+\sqrt5}\right|+C\right)'=1+\frac{\sqrt5}{2}\cdot\frac{x+\sqrt5}{x-\sqrt5}\cdot\frac{x+\sqrt5-x+\sqrt5}{\left(x+\sqrt5\right)^2}=1+\frac{\sqrt5\cdot2\sqrt5}{2\left(x-\sqrt5\right)\cdot\left(x+\sqrt5\right)}=1+\frac{5}{x^2-5}=$$

$$=\frac{x^2-5+5}{x^2-5}=\frac{x^2}{x^2-5}.$$

д) Використовуючи формули $1+\cos 2x=2\cos^2 x$ та $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, властивості 5 і 6 , табличні інтеграли 9 і 2 матимемо

$$\int\frac{1+2\sin^2 x}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{1+2\sin^2 x}{2\cos^2 x}dx=\frac12\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\frac12\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=$$

$$=\frac12\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\frac32 tgx-x+C.$$

Приклад 3. Знайти таку первісну підінтегральної функції $\int\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1}dx$, графік якої проходить через точку $A\left(1;\frac{13}{7}\right)$.

Розв`язання. Знайдемо спочатку невизначений інтеграл, тобто сукупність всіх первісних. Для цього спростимо підінтегральну функцію. За формулою $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$ розкладемо на множники чисельник дробу

$$1+\sqrt{x}=1+\left(\sqrt[6]{x}\right)^3=\left(1+\sqrt[6]{x}\right)\left(1-\sqrt[6]{x}+\left(\sqrt[6]{x}\right)^2\right)=\left(1+\sqrt[6]{x}\right)\left(1-\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}\right).$$

$$\int\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1}dx=\int\frac{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1}dx=\int\left(1+\sqrt[6]{x}\right)dx=\int dx+\int x^{\frac16}dx=x+\frac67x^{\frac76}+C.$$

Ми знайшли сукупність первісних $F(x)=x+\frac67x^{\frac76}+C$. Виберемо серед них ту, графік якої проходить через точку $A\left(1;\frac{13}{7}\right)$

$$1+\frac67+C=\frac{13}{7}\Rightarrow C=0.$$

Тобто первісна підінтегральної функції $\int\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1}dx$, графік якої проходить через точку $A\left(1;\frac{13}{7}\right)$ має вигляд $F(x)=x+\frac67x\sqrt[6]{x}$.

Приклад 4. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(1;7)$ кутовий коефіцієнт якої в кожній точці дорівнює $\mathrm{k}=-3\mathrm{x}^2$.

Розв'язання. Так як $k=y'(x_0)$ (геометричний зміст похідної), то

$$y(x)=\int kdx=\int\left(-3x^2\right)dx=-x^3+C.$$

Щоб обчислити константу C скористаємось тим, що координати точки A задовольняють це рівняння

$7 = -1^3 + C \Rightarrow C = 8$.

Рівняння кривої має вигляд

$$y = -x^3 + 8.$$

Приклад 5. Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 9t^2 - 4t + 6$. Знайти закон руху цієї точки, якщо відомо, що через 2*с* після початку руху вона була на відстані 10*м* від початку відліку.

Розв'язання. Механічний зміст похідної: $S'(t) = V(t)$. Звідси

$$\boxed{S(t) = \int V(t)dt}.$$

Тому

$$S(t) = \int (9t^2 - 4t + 6)dt = 3t^3 - 2t^2 + 6t + C.$$

Константу C обчислимо із умови $S(2) = 10$.

$$3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + C = 10 \Rightarrow C = -18.$$

Звідси маємо, що закон руху цієї матеріальної точки має вигляд:

$$S(t) = 3t^3 - 2t^2 + 6t - 18.$$

Приклад 6*.* Для розтягу пружини на 0,04 *м*, виконали роботу в 100 *Дж.* Яка буде виконана робота при розтягу пружини на 10*см*?

Розв'язання. Як відомо, розтяг пружини відбувається за законом Гука пропорційно прикладеній силі $F = kx$, де x - це розтяг пружини, що виражається в метрах, а k коефіцієнт жорсткості, що залежить від матеріалу. Виходячи з даних задачі (при $x = 0{,}04$ $F = 100$) маємо $100 = k \cdot 0.04$, звідси $k = \frac{100}{0.04} = 2500\, Н/м$. Тому $F = 2500x$.

Роботу обчислимо за формулою

$$\text{A} = \int 2500x dx = 2500 \cdot \frac{x^2}{2} + C = 1250x^2 + C.$$

Знайдемо величину константи C виходячи з того, що $A(0) = 0$, тому $0 = 1250 \cdot 0^2 + C \Rightarrow C = 0$. Маємо $\text{A} = 1250x^2$.

Обчислимо роботу по розтягу пружини на $10см = 0{,}1м$:

$$\text{A} = 1250 \cdot 0{,}1^2 = 12{,}5(\text{Дж}).$$

Запитання для самоперевірки

1. Яку функцію називають первісною для функції $y=f(x)$?
2. Сформулюйте теорему про первісні функції $y=f(x)$.
3. Що називають невизначеним інтегралом функції $y=f(x)$?
4. Які функції мають первісні?
5. Які властивості мають невизначені інтеграли?
6. Вивчити таблицю невизначених інтегралів.

Навчальні завдання

1. Знайти інтеграли (усно):

а) $\int x^4 dx$; *б)* $\int 4^x dx$; *в)* $\int \frac{dx}{\cos^2 \tilde{o}}$; *г)* $\int \frac{dx}{\tilde{o}}$; *д)* $\int \frac{dx}{\sin^2 \tilde{o}}$; *е)* $\int 3dx$; *є)* $\int 7x^{10} dx$; *ж)* $\int 20x^9 dx$; *з)* $\int 4\cos x dx$; *й)* $\int 12x^{11} dx$; *к)* $\int \frac{dx}{\sqrt{49-x^2}}$; *л)* $\int \frac{dx}{4+x^2}$; *м)* $\int \frac{dx}{x^2-9}$; *н)* $\int \frac{dx}{\sqrt{16-\tilde{o}^2}}$; *п)* $\int \frac{dx}{x^2-81}$; *о)* $\int \frac{dx}{25+x^2}$; *р)* $\int \frac{dx}{x^2-36}$; *с)* $\int \frac{dx}{\sqrt{121-x^2}}$; *т)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; *у)* $\int \frac{dx}{3+x^2}$; *ф)* $\int \frac{dx}{\sqrt{10-x^2}}$; *х)* $\int 7^x dx$; *ц)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}$; *ч)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+36}}$.

2. Використовуючи метод розбиття знайти інтеграл та результат інтегрування перевірити диференціюванням:

а) $\int \left(9+5x-\tilde{o}^{-5}\right)dx$; *б)* $\int \left(\frac{2}{x^3}+4^x-15\right)dx$; *в)* $\int \left(\frac{7}{\cos^2 x}-\sqrt{x}-\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx$; *г)* $\int \left(x^{-1}-8x^3+11\cos x\right)dx$; *д)* $\int \left(3+\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{6}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$; *е)* $\int \left(2x^{-1,5}+5x^{-0,6}-4^{0,8}\right)dx$; *є)* $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-25}}$; *ж)* $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+16}}$;

з) $\int \frac{3+2\sqrt{x}+x^3}{x^3}dx$; *й)* $\int \frac{x^6+9x^2\sqrt{x}-3}{x^3}dx$; *к)* $\int \frac{2^{x-1}+3^{x+1}}{6^x}dx$; *л)* $\int \sqrt[3]{x}\left(5\cdot\sqrt[3]{x^2}-1\right)dx$; *м)* $\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx$; *н)* $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$; *п)* $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$; *о)* $\int \frac{\sqrt{x^2+9}-6}{x^2+9}dx$; *р)* $\int \frac{5-4\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$; *с)* $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$; *т)* $\int \frac{1-\cos 2x}{6\sin x}dx$; *у)* $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$.

3. Знайти первісну підінтегральної функції, графік якої проходить через точку з координатами (x_0; y_0).

а) $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$, $x_0=0$, $y_0=5$; *б)* $\int \frac{dx}{x^2\left(x^2+1\right)}$, $x_0=0$ $y_0=\frac{\pi}{4}$;

в) $\int \frac{x^3+8}{x^2-2x+4}dx$, $x_0=0$, $y_0=5$.

4. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку A (2; 8), якщо кутовий коефіцієнт дотичної у кожній її точці дорівнює $k= x + 2$.

5. Складіть рівняння кривої, яка проходить через точку A(–1;3), якщо кутовий коефіцієнт дотичної у кожній точці дотику дорівнює потроєному квадрату абсциси точки дотику.

6. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку A (0;-1), якщо всі її дотичні паралельні до прямої $y = 5x - 3$.

7. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $V(t) = 10t - t^2$. Знайти закон руху тіла, якщо відомо, що через 3*с* після початку руху тіло було на відстані 2*м* від початку координат.

8. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку A (1;2) і тангенс кута нахилу дотичної якої у кожній точці в чотири рази більший за квадрат абсциси цієї точки.

9. Знайти масу шворня довжиною $1 = 100 см$, якщо лінійна густина матеріалу шворня на відстані *x см* від одного з кінців $\rho(x) = 2 + 0{,}001x^2$ *(г/см).*

10. Швидкість тіла кинутого вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 =20*м/с* без урахування опору повітря $v = v_0 - gt$. На яку максимальну висоту підніметься тіло?

11. Знайти роботу, виконану при стисканні її на 5*см*, якщо відомо, що для стискання її на 1*см* потрібно виконати роботу 1 *Дж.*

Завдання для самостійної роботи

12. Знайти інтеграли та у прикладах *а-г* результат інтегрування перевірити диференціюванням:

а) $\int\left(7+\frac{3}{\sin^2 x}-\frac{5}{\sqrt{25-x^2}}\right)dx$; *б)* $\int\frac{dx}{\sqrt{16x^2-64}}$; *в)* $\int\left(3^x+8^x\right)^2 dx$;

г) $\int\frac{e^{2x}-4}{e^x+2}dx$; *д)* $\int\left(x-\sqrt{x}\right)^3 dx$; *е)* $\int\frac{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{81-x^4}}dx$;

є) $\int\frac{\cos 9x+\cos 7x}{\cos 8x}dx$; *ж)* $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$; *з)* $\int\frac{5+7tg^2 x}{\sin^2 x}dx$.

13. Знайти первісну підінтегральної функції $\int\frac{x-25}{\sqrt{x}+5}dx$, графік якої проходить через точку з координатами $(9;27)$.

14. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку *A*(1;0), якщо кутовий коефіцієнт дотичної у кожній її точці дорівнює $k = 2x - 1$.

15. Швидкість прямолінійного руху точки задана формулою $V(t) = 3t^2+4t-1$. Знайдіть закон руху точки, якщо в початковий момент часу вона знаходилась в початку координат.

§ 2. МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ

Суть інтегрування *методом заміни змінної* (способом підстановки) полягає в наступному: якщо первісною до функції $g(x)$ є функція $G(x)$ і функція $y=\varphi(x)$неперервна разом з похідною $\varphi'(x)$ на деякому проміжку, то на цьому проміжку

$$\int g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=G(\varphi(x))+C\ .$$

Дану формулу доцільно записувати у вигляді

$$\boxed{\int g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\begin{vmatrix}t=\varphi(x)\\ dt=\varphi'(x)dx\end{vmatrix}=\int g(t)dt=G(t)+C=G(\varphi(x))+C}.$$

Враховуючи означення диференціала її можна записати також таким чином:

$$\int g(\varphi(x))d\varphi=G(\varphi(x))+C\ .$$

Приклад 1. Знайти невизначені інтеграли й результат інтегрування перевірити диференціюванням

а) $\int\cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)dx$; *б*) $\int\frac{3-4x}{3x-2x^2+9}dx$.

Розв'язання.

а) Даний інтеграл стане табличним, якщо зробити підстановку $t=5x-\frac{\pi}{6}$, тоді

$dt=\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)'dx=5dx$, або $dx=\frac{1}{5}dt$.

$$\int cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)dx=\begin{vmatrix}t=5x-\frac{\pi}{6}\\ dt=5dx\end{vmatrix}=\int\cos t\cdot\frac{1}{5}dt=\frac{1}{5}\int costdt=\frac{1}{5}\sin t+C=\frac{1}{5}\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)+C$$

Перевірка. Знайдемо похідну від одержаного виразу

$$\left(\frac{1}{5}\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)+C\right)'=\frac{1}{5}\cdot\cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot5+0=\cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right).$$

Ми одержали підінтегральну функцію, тобто інтегрування виконане правильно.

б) У чисельнику дробу записана похідна від знаменника $\left(3x-2x^2+9\right)'=3-4x$. Так як підінтегральний вираз містить тричлен $3x-2x^2+9$ та його похідну, то позначимо цей тричлен новою змінною $t=3x-2x^2+9$.

$$\int\frac{3-4x}{3x-2x^2+9}dx=\begin{vmatrix}t=3x-2x^2+9\\ dt=(3-4x)dx\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|3x-2x^2+9\right|+C\ .$$

Перевірка. Шукаємо похідну від одержаного виразу

$$\left(\ln\left|3x-2x^2+9\right|+C\right)'=\frac{1}{3x-2x^2+9}\cdot(3-4x)+0=\frac{3-4x}{3x-2x^2+9}\ .$$

Розглянемо дві важливі формули, які суттєво пришвидшують інтегрування:

1) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$ (Так зване «третє правило знаходження первісних»: Якщо $F(x)$є первісною для $f(x)$, то для функції $f(ax+b)$ первісною буде функція $\frac{1}{a}F(ax+b)$).

З використанням цього правила інтеграл *а*) із прикладу 1 можна обчислити наступним чином: так як функція $F(x)=\sin x$ є первісною для $f(x)=\cos x$, то для функції $\cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$ первісною буде функція $\frac{1}{5}\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$, тобто не вводячи нову змінну $\int cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)dx = \frac{1}{5}\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)+C$.

2) $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u|+C$. (Якщо у чисельнику дробу записана похідна від знаменника, то інтеграл від такого дробу дорівнює натуральному логарифму від модуля знаменника плюс константа).

Враховуючи формулу 2) (оскільки $(3x-2x^2+9)' = 3-4x$) можна записати $\int \frac{3-4x}{3x-2x^2+9}dx = \ln\left|3x-2x^2+9\right|+C$.

Нехай підінтегральний вираз можна розбити на два множники і в одному з них легко розпізнати похідну деякої функції $\varphi(x)$. Може статися, що після підстановки $\varphi(x)=t$ другий множник перетвориться у таку функцію від t, яку легко про інтегрувати.

Приклад 2. Знайти невизначені інтеграли

а) $\int (3\tilde{o}^2-4)^{\frac{3}{2}}6xdx$; *б*) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos xdx$; *в*) $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctgx}$; *г*) $\int \frac{(5+\ln^7 x)}{x}dx$

д) $\int \frac{11xdx}{\sqrt{81-x^4}}$; *е*) $\int \frac{x^5}{4+x^{12}}dx$; *є*) $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{64+\cos^2 x}}$; *ж*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x+1}}$.

Розв'язання. *а*) Розіб'ємо підінтегральний вираз на два множники $(3x^2-4)^{\frac{3}{2}}$ та $6xdx$. $6x$ являється похідною функції $(3x^2-4)$. Після підстановки $t=(3x^2-4)$ множник $(3x^2-4)^{\frac{3}{2}}$ набуде вигляду $t^{\frac{3}{2}}$, а ця функція інтегрується за таблицею

$$\int (3\tilde{o}^2-4)^{\frac{3}{2}}6xdx = \begin{vmatrix} t=3x^2-4 \\ dt=6xdx \end{vmatrix} = \int t^{\frac{3}{2}}dt = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+C = \frac{2}{5}(3x^2-4)^{\frac{5}{2}}+C$$

б) Розбиваємо підінтегральний вираз на два множники $\sqrt[3]{\sin^2 x}$ та $\cos x dx$. Тут $\cos x dx$ є диференціалом функції $\sin x$. Підстановка $t = \sin x$ перетворює множник $\sqrt[3]{\sin^2 x}$ у функцію $\sqrt[3]{t^2}$, а ця функція інтегрується за таблицею:

$$\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos x dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int t^{\frac{2}{3}} dt = \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} dt = \frac{3}{5} \sin^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} \sqrt[3]{\sin^5 x} + C .$$

в) В цьому випадку підінтегральний вираз зручно розбити на множники $\frac{1}{arctgx}$ і $\frac{dx}{1+x^2}$. Так як другий множник це диференціал від функції $arctgx$, то введемо заміну $t = arctgx$:

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right) arctgx} = \int \frac{1}{arctgx} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \left| \begin{matrix} t = arctgx \\ dt = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln t + C = \ln\left(arctgx\right) + C .$$

г) Підінтегральний вираз розіб'ємо на множники таким чином: $5 + \ln^7 x$ та $\frac{dx}{x}$ (бо $\ln' x = \frac{1}{x}$), звідси

$$\int \frac{\left(5+\ln^7 x\right)}{x} dx = \int \left(5+\ln^7 x\right) \cdot \frac{dx}{x} = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int \left(5+t^7\right) dt = 5t + \frac{t^8}{8} + C = 5 \ln x + \frac{1}{8} \ln^8 x + C .$$

д) Якщо позначити новою змінною підкореневий вираз $t = 81 - x^4$, то $dt = -4x^3 dx$, а підінтегральний вираз містить тільки xdx. Пам'ятаючи, що $\left(x^2\right)' = 2x$, логічно припустити заміну $t = x^2$, адже $x^4 = \left(x^2\right)^2$.

$$\int \frac{11xdx}{\sqrt{81-x^4}} = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{matrix} \right| = \int \frac{5{,}5dt}{\sqrt{9^2 - t^2}} = 5{,}5 arczin \frac{t}{9} + C = 5{,}5 \arcsin \frac{x^2}{9} + C .$$

е) По аналогії з попереднім прикладом ($x^5 = \frac{1}{6}\left(x^6\right)'$, а $x^{12} = \left(x^6\right)^2$) вводимо заміну $t = x^6$

$$\int \frac{x^5}{4+x^{12}} dx = \left| \begin{matrix} t = x^6 \\ dt = 6x^5 dx \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{6} dt}{4+t^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C = \frac{1}{12} arctg \frac{x^6}{2} + C .$$

є) Спочатку перейдемо до однакових значень аргументу синуса і косинуса

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{64+\cos^2 x}} = \int \frac{2 \sin x \cos x dx}{\sqrt{64+\cos^2 x}} .$$

Якщо ввести заміну $t = \cos x$, то $dt = -\sin xtx$ і така заміна приведе до простішого за виглядом, але не табличного інтеграла $\int \frac{2tdt}{\sqrt{64+t^2}}$, для його обчислення прийдеться ще раз вводити заміну. Тому, пригадавши, що $\left(\cos^2 x\right)' = 2\cos x(-\sin x)$, логічно ввести заміну $t = \cos^2 x$.

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{64+\cos^2 x}} = \int \frac{2\sin x \cos x dx}{\sqrt{64+\cos^2 x}} = \left| \begin{matrix} t = \cos^2 x \\ dt = -2\cos x \sin x \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{\sqrt{64+t^2}} = -\ln\left|t + \sqrt{64+t^2}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\cos^2 x + \sqrt{64+\cos^2 x}\right| + C$$

ж) Знаходячи даний інтеграл зручно зробити таку заміну $t^2 = 5x+1$, звідси $x = \frac{1}{5}\left(t^2 - 1\right)$, а $dx = \frac{2}{5}tdt$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x+1}} = \left| \begin{matrix} t^2 = 5x+1 \\ x = \frac{1}{5}\left(t^2-1\right) \\ dx = \frac{2}{5}tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2}{5}tdt}{\frac{1}{5}\left(t^2-1\right)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{5x+1-1}{5x+1+1}\right| + C = \ln\left|\frac{5x}{5x+2}\right| + C$$

Приклад 3. Знайти інтеграли, які містять квадратні тричлени у знаменнику дробу

а) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$; *б*) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

Розв'язання. *а*) Спочатку виділимо повний квадрат квадратного тричлена $x^2+4x-5 = \underbrace{x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2}-2^2-5 = (x+2)^2-9$. Замінивши виділений вираз новою змінною, одержимо

$$\int \frac{dx}{x^2+4x-5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-9} = \left| \begin{matrix} t = x+2 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+2-3}{x+2+3}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right| + C.$$

б) Почнемо з виділення повного квадрата підкореневого виразу

$$-2x^2+3x+2 = -2\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right) = -2\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2-1\right) = -2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-1\right) =$$

$$= 2\left(\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\right).$$

Замінивши виділений вираз новою змінною одержимо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2\left(\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\right)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}=\left|\begin{matrix}t=x-\frac{3}{4}\\ dt=dx\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4t}{5}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4\left(x-\frac{3}{4}\right)}{5}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$$

Запитання для самоперевірки

1. В чому полягає суть інтегрування методом заміни змінної?
2. Чому дорівнює інтеграл від дробу, в чисельнику якого є похідна від знаменника?
3. За якою формулою зручно обчислити інтеграл $\int f(ax+b)dx$?

Навчальні завдання

16. Знайти інтеграли (усно):

а) $\int\cos(5x+3)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sin^2 6x}$; в) $\int(12x-5)^7dx$; г) $\int(8x+9)^{12}dx$;

д) $\int e^{4-3x}dx$; е) $\int\frac{dx}{\cos^2 7x}$; є) $\int\sin(3x-24)dx$; ж) $\int 6^{5x+2}dx$;

з) $\int\frac{dx}{(5-3x)^4}$; й) $\int\cos(x+5)dx$; к) $\int\cos 11x dx$; л) $\int e^{7x-12}dx$;

м) $\int\frac{dx}{\sin^2(2x+7)}$; н) $\int(5x+16)^{-2}dx$; п) $\int 9^{7x-4}dx$; о) $\int\sin\left(\frac{\pi}{2}-9x\right)dx$;

р) $\int\frac{dx}{\sin^2(5x-8)}$; с) $\int\sin\left(\frac{\pi}{7}+6x\right)dx$.

17. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{(8x+8)dx}{4x^2+8x-9}$; б) $\int\frac{dx}{6x+15}$; в) $\int\frac{x^2dx}{13-9x^3}$; г) $\int\frac{\sin xdx}{20-\cos x}$;

д) $\int\frac{e^{2x}dx}{1-3e^{2x}}$; е) $\int ctgx dx$; є) $\int\frac{dx}{x\cdot(\ln x)}$; ж) $\int\frac{dx}{tgx\cdot\cos^2 x}$;

з) $\int x\sqrt{x^2-7}dx$; й) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; к) $\int\frac{e^xdx}{(e^x-5)^3}$; л) $\int\frac{2^xdx}{\sqrt{1-4^x}}$;

м) $\int\frac{\sqrt[6]{\ln^5 x}dx}{x}$; н) $\int e^{-x^2}xdx$; п) $\int\frac{x^2dx}{x^6+1}$; о) $\int e^{7\sin x-12}cosxdx$;

р) $\int\frac{\cos xdx}{\sin^8 x}$; с) $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{11-4\cos x}}$.

18. Знайти інтеграли, які містять квадратні тричлени у знаменнику дробу

а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$; *б)* $\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$; *в)* $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+2}}$; *г)* $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

Завдання для самостійної роботи

19. Знайти інтеграли:

а) $\int \sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)dx$; *б)* $\int \frac{dx}{\cos^2(9x-7)}$; *в)* $\int (7x-9)^4 dx$; *г)* $\int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x}$;

д) $\int \frac{e^{6x}dx}{1+4e^{6x}}$; *е)* $\int tgx dx$; *є)* $\int \frac{(6x-5)dx}{\sqrt{3x^2-5x+6}}$; *ж)* $\int x^2 6^{1-x^3} dx$; *з)* $\int \frac{7^x dx}{\sqrt{49^x+1}}$.

§ 3. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Нехай функції *u(x)* і *v(x)* визначені і неперервні разом із своїми похідними на деякій множині {*X*}. Тоді, якщо існує первісна до функції *u′(x)·v(x)*, то існує первісна і до функції *u(x)·v′(x)*, при чому має місце рівність

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

З урахуванням означення диференціала цю формулу можна записати також у вигляді

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Знаходження інтеграла за формулою $\int udv = uv - \int vdu$ називають *інтегруванням частинами*. За допомогою цієї формули відшукання інтеграла $\int udv$ зводиться до відшукання іншого інтеграла $\int vdu$. Її застосування доцільне в тих випадках, коли інтеграл, який утворюється, або простіший за даний, або ж подібний до нього.

При цьому в ролі множника *dv* береться та частина підінтегрального виразу, інтеграл від якої відомий, чи може бути знайдений.

Приклад 1. Обчислити інтеграли *а)* $\int xe^x dx$; *б)* $\int x^3 \ln x dx$.

Розв'язання.

а) Інтеграли $\int xdx$ та $\int e^x dx$ табличні, але при диференціюванні $x'=1$, $\left(e^x\right)'=e^x$ спрощується перший вираз, тому у ролі множника *u* візьмемо *x*. Звідси

$$\int xe^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow \ v = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

б) З двох інтегралів $\int \ln x dx$ та $\int x^3 dx$ простішим є другий, тому у ролі множника *u* візьмемо $\ln x$.

$$\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx \Rightarrow & v = \dfrac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \int \frac{1}{4} x^4 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C .$$

Практика показує, що більшість інтегралів, які знаходяться за частинами можна розбити на три групи.

Деякі типи інтегралів як знаходяться інтегруванням частинами

1. Інтеграли виду $\int P_n(x) \cdot e^{\alpha x} dx$, $\int P_n(x) \cdot \sin x dx$ та $\int P_n(x) \cdot \cos x dx$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n. В цих інтегралах у якості множника u вибирають многочлен і виконують інтегрування за частинами n разів.

Приклад 2. Зайти інтеграл $\int x^2 \cos x dx$ і результат інтегрування перевірити диференціюванням.

Розв'язання.

$$\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow & v = \sin x \end{matrix} \right| = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow & v = -\cos x \end{matrix} \right| = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\int cosxdx =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C .$$

Перевірка. $\left(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C\right)' = 2x \sin x + x^2 \cos x + 2\cos x -$

$- 2x \sin x - 2\cos x = x^2 \cos x$.

2. Інтеграли виду $\int P_n(x) \cdot \ln x\, x dx$, $\int P_n(x) \cdot \arcsin x dx$, $\int P_n(x) \cdot \arccos x dx$, $\int P_n(x) \cdot arctgx dx$ і $\int P_n(x) \cdot arcctgx dx$, де $P_n(x)$– многочлен степені *n*. У таких інтегралах у ролі множника *u* вибирають логарифмічну, чи обернену тригонометричну функцію.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \arcsin x dx$.

Розв'язання.

$$\int \arcsin x dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x \end{matrix} \right| = x \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} t = 1 - x^2 \\ dt = -2xdx \end{matrix} \right| = =$$

$$x \arcsin x + \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = x \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} .$$

3. Інтеграли вигляду $\int a^{\alpha x} \cdot \sin x dx$ та $\int a^{\alpha x} \cdot \cos x dx$, також знаходяться інтегруванням частинами. Вказаний метод необхідно використати двічі, кожний раз у ролі множника *u* можна вибирати чи показникову, чи тригонометричну функцію. Після цього у правій частині буде саме такий інтеграл, як і у лівій, тільки з іншим коефіцієнтом.

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int e^x \sin x dx$.

Розв'язання.

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = e^x & \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = e^x & \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow & v = \sin x \end{matrix} \right| = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx .$$

Перенесемо одержаний інтеграл у ліву частину до даного. Оскільки $2\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C$, то

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C .$$

Зрозуміло, що вказані три групи не вичерпують всіх інтегралів, які можна обчислити, використовуючи інтегрування частинами.

Приклад 5. Знайти інтеграли: *а)* $\int \dfrac{xdx}{\sin^2 x}$; *б)* $\int \sqrt{x^2+3}dx$.

Розв'язання. Ці інтеграли не відносяться до жодної з перерахованих вище груп, але їх також можна обчислити частинами.

а) $$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = \left| \begin{matrix} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} & \Rightarrow v = -ctgx \end{matrix} \right| = -xctgx + \int ctgx dx = -xctgx + \int \frac{\cos x dx}{\sin x} =$$

$$= -xctgx + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -xctgx + \ln|\sin x| + C .$$

б) $\int \sqrt{3-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} u=\sqrt{3-x^2} \Rightarrow du = \dfrac{-2xdx}{2\sqrt{3-x^2}} \\ dv = dx \qquad \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x\sqrt{3-x^2} - \int \dfrac{-x^2}{\sqrt{3-x^2}}dx$.

Додамо й віднімемо число 3 у чисельнику одержаного підінтегрального дробу, а потім розіб'ємо інтеграл на суму двох інтегралів

$$\int \frac{3-x^2-3}{\sqrt{3-x^2}}dx = \int \frac{3-x^2}{\sqrt{3-x^2}}dx - \int \frac{3}{\sqrt{3-x^2}}dx = \int \sqrt{3-x^2}\,dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} =$$

$$= \int \sqrt{3-x^2}\,dx - 3\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Підставивши одержаний вираз матимемо

$$\int \sqrt{3-x^2}\,dx = x\sqrt{3-x^2} - \int \sqrt{3-x^2}\,dx + 3\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Об'єднуючи обидва інтеграли у лівій частині рівності одержимо

$$2\int \sqrt{3-x^2}\,dx = x\sqrt{3-x^2} + 3\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

А отже, кінцевий результат буде такий:

$$\int \sqrt{3-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{3-x^2} + \frac{3}{2}\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Запитання для самоперевірки

1. За якою формулою здійснюється інтегрування частинами?
2. В яких випадках доцільно застосувати цю формулу?
3. При інтегруванні яких виразів найзручніше використовувати метод інтегрування частинами?

Навчальні завдання

20. Знайти інтеграли

а) $\int (-x+2)sinx\,dx$; б) $\int (5x^2+8)\cos x\,dx$; в) $\int x^7 \ln x\,dx$;

г) $\int (5x-2)\ln x\,dx$; д) $\int \frac{\ln x}{x^9}dx$; е) $\int e^{x+2}(4x^2-5x^3)dx$;

є) $\int 8^x(2x^3+5x^2)dx$; ж) $\int e^{2x}(3x^2+5x)dx$; з) $\int 5arctgx\,dx$;

й) $\int \arcsin 4x\,dx$; к) $\int \arccos 7x\,dx$; л) $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$;

м) $\int 6^x \sin 12x\,dx$; н) $\int \sqrt{81-x^2}\,dx$; п) $\int \ln\left(1+x^2\right)dx$;

о) $\int \frac{4x}{5\sin^2 x}dx$; р) $\int \frac{dx}{\left(x^2-2\right)^2}$; с) $\int \frac{4x}{\cos^2 8x}dx$.

Завдання для самостійної роботи

21. Знайти інтеграли

а) $\int (2x-5)\sin x dx$; *б*) $\int (x^2+4)\ln x dx$; *в*) $\int \frac{\ln x}{x^3} x dx$;

г) $\int 2^{3x}(5x^3-7x+1)dx$; *д*) $\int e^{-x}(6x^3-6x+2)dx$; *е*) $\int \arcsin x dx$;

є) $\int e^{-x}\cos 6x dx$; *ж*) $\int \sqrt{4+x^2}dx$; *з*) $\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

§4. *ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ*

Раціональною функцією називають функцію вигляду $\frac{Q_k(x)}{P_l(x)}$, де $Q_k(x)$ і $P_l(x)$ многочлени степенів k і l відповідно. Раціональний дріб називають *правильним,* якщо степінь многочлена в чисельнику менший за степінь многочлена в знаменнику. В противному випадку раціональний дріб називається *неправильним.*

4.1. *Представлення раціонального дробу у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу.*

Виділяючи з неправильного дробу його цілу частину (шляхом ділення чисельника на знаменник), завжди можна представити його у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу $\frac{Q_k(x)}{P_l(x)} = M_{k-l}(x) + \frac{R_{l-1}(x)}{P_l(x)}$.

Приклад 1. Виділити цілу частину неправильного дробу:

а) $\frac{x^2}{x^2+3}$; *б*) $\frac{4x^4-x^3+6x-12}{x^2+3x+1}$.

Розв'язання. *а*) Дріб досить простий, тому його цілу частину можна виділити таким чином: $\frac{x^2}{x^2+3} = \frac{x^2+3-3}{x^2+3} = 1 + \frac{-3}{x^2+3}$.

б) У цьому випадку поділимо чисельник на знаменник у стовпчик

$$\begin{array}{l|l}
4x^4 - x^3 + 0x^2 + 6x - 12 & \underline{x^2+3x+1} \\
\underline{4x^4 + 12x^3 + 4x^2} & 4x^2 - 13x + 35 \\
\quad -13x^3 - 4x^2 + 6x & \\
\quad \underline{-13x^3 - 39x^2 - 13x} & \\
\qquad\qquad 35x^2 + 19x - 12 & \\
\qquad\qquad \underline{35x^2 + 105x + 35} & \\
\qquad\qquad\qquad -86x - 47 &
\end{array}$$

В результаті маємо $\frac{4x^4-x^3+6x-12}{x^2+3x+1} = 4x^2 - 13x + 35 - \frac{86x+47}{x^2+3x+1}$.

Тобто неправильний раціональний дріб ми подали у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу.

4.2. *Правило розкладання правильного раціонального дробу на елементарні.*

Правильні дроби бувають елементарні та неелементарні. Є чотири типи елементарних раціональних дробів:

1) $\dfrac{1}{ax+b}$, 2) $\dfrac{1}{(ax+b)^m}$, 3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4) $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$,

де m і n – натуральні числа ($m \geq 2$, $n \geq 2$) і $b^2 - 4ac < 0$.

Якщо $R(x)=\dfrac{Q_k(x)}{P_l(x)}$ правильний раціональний дріб, знаменник якого $P_l(x)$ представлений у вигляді добутку лінійних і квадратичних множників (з дійсними коефіцієнтами)

$$P_l(x)=C(x-a)^p \ldots (x-b)^m \left(x^2+px+q\right)^k \ldots \left(x^2+rx+s\right)^n,$$

то цей дріб може бути розкладений на елементарні дроби за наступною схемою:

$$\frac{Q_k(x)}{P_l(x)} = \frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_l}{(x-a)^p}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_m}{(x-b)^m}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}++\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{R_nx+S_n}{(x^2+rx+s)^n} \qquad (*)$$

Розкладання правильного раціонального дробу $\dfrac{Q_k(x)}{P_l(x)}$ на суму елементарних дробів виконують за *методом невизначених коефіцієнтів.* Для цього потрібно:

1. Розкласти знаменник $P_l(x)$ на лінійні та квадратичні множники, які не мають дійсних коренів.
2. Записати розклад раціонального дробу на елементарні за схемою (*).
3. Звести елементарні дроби до спільного знаменника.
4. Прирівняти чисельники даного й одержаного дробів.
5. Для того щоб два многочлени були тотожно рівні, необхідно й достатньо, щоб коефіцієнти при однакових степенях змінної у них були рівні. З огляду на це зауваження, прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях змінної у лівій і правій частинах рівності, одержуючи тим самим систему алгебраїчних рівнянь для обчислення невизначених коефіцієнтів.

Приклад 2. Розкласти на елементарні дроби $\dfrac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}$.

Розв'язання. Даний дріб правильний.

1. Так як $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

2. Розкладемо даний дріб на елементарні за схемою (*) $\dfrac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}=$

$\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-4}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$, де *A, B, C, D* — невизначені коефіцієнти.

3. Звеведемо дроби у правій частині до спільного знаменника

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=\frac{A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x-2)(x-4)}{(x-4)(x-2)(x^2+4)}.$$

4. Прирівняємо многочлен, який одержався в чисельнику, до многочлена $9x^3-30x^2+28x-88$ та одержимо:

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$
$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

5. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях *x*, отримаємо систему:

$$\begin{cases} A+B+C=9, \\ -4A-2B-6C+D=-30, \\ 4A+4B+8C-6D=28, \\ -16A-8B+8D=-88. \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему і знаходимо: *A*=5, *B*=3, *C*=1, *D*=2, а тому

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}=\frac{5}{x-2}+\frac{3}{x-4}+\frac{x+2}{x^2+4}.$$

Замість того щоб прирівнювати коефіцієнти при однакових степенях *x,* можна змінні *x* надати ряд конкретних довільних значень (стільки, скільки невизначених коефіцієнтів) і одержати в такий спосіб систему рівнянь щодо невизначених коефіцієнтів. Цей прийом називається *методом довільних значень.*

Так, у розглянутому вище прикладі, звівши елементарні дроби до спільного знаменника і прирівнявши чисельник одержаного дробу до многочлена $9x^3-30x^2+28x-88$ та надаючи змінній *x* послідовно значення $x=2$, $x=4$, $x=0$, $x=1$, можна одержати систему рівнянь:

$$\begin{cases} -16A=-80, \\ 40B=120, \\ -16A-8B+8D=-88, \\ -15A-5B+3C+3D=-81. \end{cases}$$

Іноді для знаходження невизначених коефіцієнтів зручно застосовувати комбінацію зазначених вище методів.

Узагальнюючи сказане вище можна відзначити, що всякий раціональний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлена та елементарних дробів. Оскільки інтегрування многочлена являється справою досить простою, то для інтегрування раціональних функцій досить розглянути інтеграли від елементарних дробів.

4.3. Інтегрування елементарних дробів

1) $\dfrac{1}{ax+b}$, 2) $\dfrac{1}{(ax+b)^m}$, 3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$,

де *m* і *n* – натуральні числа ($m \geq 2$, $n \geq 2$) і $b^2 - 4ac < 0$.

Інтеграли елементарних дробів 1) та 2) типів підстановкою $t=ax+b$ зводяться до табличних:

1) $$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

2) $$\int \frac{1}{(ax+b)^m}dx = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^m} = \frac{1}{a}\int t^{-m}dt = -\frac{1}{a}\frac{t^{-(m-1)}}{m-1} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C .$$

3) Для того, щоб проінтегрувати елементарний дріб третього типу розкладемо його на суму двох дробів таким чином, щоб у чисельнику першого дробу була похідна від знаменника.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int\frac{2x+\frac{2N}{M}}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int\frac{2x+p+\frac{2N}{M}-p}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int\left(\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{2N}{M}-p}{x^2+px+q}\right)dx = \frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \frac{M}{2}\left(\frac{2N}{M}-p\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}dx = I_1 + I_2 .$$

Розглянемо кожен інтеграл окремо:

$$I_1 = \int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \begin{vmatrix} t = x^2+px+q \\ dt = (2x+p)dx \end{vmatrix} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x^2+px+q\right| + C;$$

$$I_2 = \int\frac{dx}{x^2+px+q} = \int\frac{dx}{x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q} = \int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} = \begin{vmatrix} t = x+\frac{p}{2} \\ dt = dx \end{vmatrix} =$$

$$\int\frac{dt}{t^2+(q-\frac{p^2}{4})} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{t}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C_1 = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C_1 .$$

Таким чином маємо

$$\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx = \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C_1 .$$

4) Для того, щоб проінтегрувати елементарний дріб четвертого типу в чисельнику дробу виділимо похідну від квадратного тричлена і розкладемо одержаний інтеграл на суму двох інтегралів.

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+\frac{2N}{M}}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p+\frac{2N}{M}-p}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = \frac{M}{2}\int\left(\frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^n}+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{2N}{M}-p}{\left(x^2+px+q\right)^n}\right)dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx + \frac{M}{2}\left(\frac{2N}{M}-p\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = I_1 + I_2 .$$

$$I_1 = \int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = \begin{vmatrix} t = x^2+px+q \\ dt = (2x+p)dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^n} = \int t^{-n}dt = \frac{t^{-n+1}}{-n+1}+C = \frac{1}{(1-n)\left(x^2+px+q\right)^{1-n}}+C$$

Щоб обчислити другий інтеграл, виділимо спочатку повний квадрат тричлена, який знаходиться у знаменнику:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n} = \int \frac{dx}{\left(x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q\right)^n} = \int \frac{dx}{\left((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n} .$$

Введемо заміну $u = x+\frac{p}{2}$, яка перевтворює цей інтеграл у інтеграл вигляду $I_n = \int \frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^n}$. Для знаходження таких інтегралів скористаємось *рекурентною формулою*

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1} .$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл:

а) $\int \frac{dx}{(7x+11)^4}$; *б*) $\int \frac{2x+15}{x^2+4x+10}dx$; *в*) $\int \frac{3x-2}{x^2+x-2}dx$; *г*) $\int \frac{7x-3}{2x+2}dx$;

д) $\int \frac{3x^3-4x^2-18x-12}{x^2-x-6}dx$; *е*) $\int \frac{3x+4}{(7x-5)^{21}}dx$; *є*) $\int \frac{3\ln x+5}{x\left(\ln^2 x-\ln x+3\right)}dx$.

У прикладі *в*) результат інтегрування перевірити диференціюванням.

Розв'язання.

а) Підінтегральний вираз являється правильним елементарним дробом другого типу. Тому інтегрувати його будемо, ввівши заміну $t = 7x+11$.

$$\int \frac{dx}{(7x+11)^4} = \begin{vmatrix} t = 7x+11 \\ dt = 7dx \end{vmatrix} = \frac{1}{7}\int \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{7}\int t^{-4}dt = \frac{1}{7}\cdot\frac{t^{-3}}{-3}+C = -\frac{1}{21(7x+11)^3}+C .$$

б) Під інтегралом знаходиться правильний дріб. Щоб перевірити, буде він елементарним чи ні, знайдемо дискримінант знаменника $D = 16-40 = -24 < 0$. Отже, дріб є елементарним третього типу. Розкладемо підінтегральний вираз на суму двох дробів таким чином, щоб у чисельнику одного з них була похідна від знаменника.

$$\int \frac{2x+15}{x^2+4x+10}dx = \int \frac{2x+4+11}{x^2+4x+10}dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+10}dx + \int \frac{11}{x^2+4x+10}dx = I_1 + I_2 .$$

Знайдемо кожний інтеграл окремо.

$$I_1 = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+10}dx = \left| \begin{matrix} t = x^2+4x+10 \\ dt = (2x+4)dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x^2+4x+10\right| + C .$$

$$I_2 = \int \frac{11}{x^2+4x+10}dx = \int \frac{11}{x^2+4x+4+6}dx = 11\int \frac{dx}{(x+2)^2+6} = \left| \begin{matrix} t = x+2 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = 11\int \frac{dt}{t^2+6} =$$

$$= \frac{11}{\sqrt{6}} arctg \frac{t}{\sqrt{6}} + C = \frac{11}{\sqrt{6}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C .$$

Остаточно маємо

$$\int \frac{2x+15}{x^2+4x+10}dx = \ln\left|x^2+4x+10\right| + \frac{11}{\sqrt{6}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C .$$

в) Дріб правильний. Знайдемо дискримінант знаменника, щоб перевірити буде він елементарним чи ні. Оскільки $D = 1+8 = 9 > 0$, то дріб буде неелементарним, а отже його можна розкласти на суму елементарних. Для цього:

1) розкладемо на множники знаменник дробу. За теоремою Вієта маємо $x_1 = -2;\ x_2 = 1$, тому $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$.

2) Даний дріб розкладається на суму двох елементарних дробів за схемою

$$\frac{3x-2}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} .$$

3) Зведемо елементарні дроби до спільного знаменника

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + Bx + 2B}{(x+2)(x-1)} = \frac{x(A+B) - A + 2B}{(x+2)(x-1)} ;$$

4) прирівняємо чисельники даного й утвореного дробів

$$3x - 2 = x(A+B) - A + 2B .$$

Для того, щоб два многочлени були тотожно рівні, необхідно й достатньо, щоб коефіцієнти при однакових степенях *x* у них були рівні. З огляду на це

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ -A + 2B = -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{3}, \\ A = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Тобто $\frac{3x-2}{x^2+x-2} = \frac{\frac{8}{3}}{x+2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1}$. Тому даний інтеграл можна розкласти на суму двох інтегралів

$$\int \frac{3x-2}{x^2+x-2}dx = \int \frac{\frac{8}{3}}{x+2}dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1}dx = \frac{8}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C .$$

Перевірка. Продиференціюємо одержаний вираз

$$\left(\frac{8}{3}\ln|x+2|+\frac{1}{3}\ln|x-1|+C\right)' = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} = \frac{8x-8+x+2}{3(x+2)(x-1)} = \frac{9x-6}{3(x+2)(x-1)} = \frac{3x-2}{x^2+x-2}.$$

В результаті одержали підінтегральний вираз, тому інтегрування виконане вірно.

г) У цьому випадку дріб неправильний, тому спочатку виділимо цілу частину, поділивши чисельник на знаменник.

$$\begin{array}{l|l} 7x-3 & \underline{2x+2} \\ \underline{7x+7} & 3{,}5 \\ \quad -10 & \end{array}$$

звідси $\dfrac{7x-3}{2x+2} = 3{,}5+\dfrac{-10}{2x+2}$. Тому

$$\int\frac{7x-3}{2x+2}dx = \int\left(3{,}5+\frac{-10}{2x+2}\right)dx = \int 3{,}5dx - \int\frac{10}{2x+2}dx = 3{,}5x - 10\cdot\frac{1}{2}\ln|2x+2|+C =$$

$$= 3{,}5x - 5\ln|2x+2|+C.$$

д) Дріб також неправильний. Поділимо чисельник на знаменник, щоб виділити його цілу частину.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2-18x-12 & \underline{x^2-x-6} \\ \underline{3x^3-3x^2-18x} & 3x-1 \\ \quad -x^2+0x-12 & \\ \quad \underline{-x^2+x+6} & \\ \qquad -x-18 & \end{array}$$

Так як $\dfrac{3x^3-4x^2-18x-12}{x^2-x-6} = 3x-1+\dfrac{-x-18}{x^2-x-6}$, то

$$\int\frac{3x^3-4x^2-18x-12}{x^2-x-6}dx = \int\left(3x-1+\frac{-x-18}{x^2-x-6}\right)dx = \int(3x-1)dx - \int\frac{x+18}{x^2-x-6}dx =$$

$$= \frac{3x^2}{2} - x - \int\frac{x+18}{x^2-x-x}dx.$$

Підінтегральний дріб правильний, але неелементарний ($D=25>0$). Розкладемо його на суму елементарних дробів. За теоремою Вієта знаходимо корені знаменника $x_1=3;\ x_2=-2$, тобто $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$. Тому

$$\frac{x+18}{x^2-x-6} = \frac{x+18}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx-3B}{(x-3)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A-3B}{(x-3)(x+2)}.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x у чисельниках першого і останнього дробів.

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 2A-3B=18; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5A=21, \\ B=1-A; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{21}{5}, \\ B=-\dfrac{16}{5}; \end{cases}$$. Тобто $\dfrac{x+18}{x^2-x-6} = \dfrac{\frac{21}{5}}{x-3}+\dfrac{-\frac{16}{5}}{x+2}$.

Звідси

$$\int \frac{x+18}{x^2-x-6}dx = \int \frac{\frac{21}{5}}{x-3}dx + \int \frac{-\frac{16}{5}}{x+2}dx = \frac{21}{5}\ln|x-3| - \frac{16}{5}\ln|x+2| + C.$$

Остаточно маємо

$$\int \frac{3x^3-4x^2-18x-12}{x^2-x-6}dx = \frac{3x^2}{2} - x - \frac{21}{5}\ln|x-3| + \frac{16}{5}\ln|x+2| + C.$$

е) Дріб правильний і неелементарний. Тому його необхідно розкласти на елементарні дроби за вказаним алгоритмом. Оскільки степінь знаменника 21, а отже має бути сума 21 елементарного дробу у схемі розкладу, то така робота дуже громіздка. Тому у даному випадку зручніше ввести заміну $t = 7x-5$.

$$\int \frac{3x+4}{(7x-5)^{21}}dx = \left| \begin{array}{l} t = 7x-5 \\ x = \frac{1}{7}t + \frac{5}{7} \\ dx = \frac{1}{7}dt \end{array} \right| = \int \frac{3\left(\frac{1}{7}t + \frac{5}{7}\right)+4}{t^{21}} \cdot \frac{1}{7}dt = \frac{1}{7}\int \frac{\frac{3}{7}t + \frac{15}{7} + 4}{t^{21}}dt = \frac{1}{7}\int \frac{\frac{3}{7}t + \frac{43}{7}}{t^{21}}dt.$$

Розкладемо одержаний інтеграл на суму двох інтегралів

$$\frac{1}{7}\int \frac{\frac{3}{7}t + \frac{43}{7}}{t^{21}}dt = \frac{1}{7}\int \frac{\frac{3}{7}t}{t^{21}}dt + \frac{1}{7}\int \frac{\frac{43}{7}}{t^{21}}dt = \frac{3}{49}\int \frac{t}{t^{21}}dt + \frac{43}{49}\int \frac{dt}{t^{21}} = \frac{3}{49}\int t^{-20}dt + \frac{43}{49}\int t^{-21}dt = \frac{3}{49}\cdot\frac{t^{-19}}{(-19)} +$$

$$+ \frac{43}{49}\cdot\frac{t^{-20}}{(-20)} + C = -\frac{3}{931t^{19}} - \frac{43}{980t^{20}} + C.$$

Ввівши зворотню заміну, в кінцевому підсумку будемо мати

$$\int \frac{3x+4}{(7x-5)^{21}}dx = -\frac{3}{931(7x-5)^{19}} - \frac{43}{980(7x-5)^{20}} + C.$$

є) Даний підінтегральний вираз не є раціональним. Ввівши заміну $t = \ln x$, ми перетворимо його у раціональний вираз.

$$\int \frac{3\ln x + 5}{x(\ln^2 x - \ln x + 3)}dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{3t+5}{t^2-t+3}dt.$$

Одержали інтеграл від правильного елементарного ($D = -11 < 0$) дробу третього типу. Розкладемо його на суму двох дробів, виділивши в чисельнику першого похідну від знаменника.

$$\int \frac{3t+5}{t^2-t+3}dt = \frac{3}{2}\int \frac{2t-1+1+\frac{10}{3}}{t^2-t+3}dt = \frac{3}{2}\int \frac{2t-1}{t^2-t+3}dt + \frac{3}{2}\int \frac{\frac{13}{3}}{t^2-t+3}dt = \frac{3}{2}I_1 + \frac{3}{2}I_2.$$

Розглянемо окремо кожен інтеграл.

$$I_1 = \int \frac{2t-1}{t^2-t+3}dt = \left| \begin{array}{l} y = t^2-t+3 \\ dy = (2t-1)dt \end{array} \right| = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln\left|t^2-t+3\right| + C.$$

$$I_2=\int\frac{\frac{13}{3}}{t^2-t+3}dt=\frac{13}{3}\int\frac{dt}{t^2-2t\cdot0{,}5+0{,}25-0{,}25+3}=\frac{13}{5}\int\frac{dt}{(t-0{,}5)^2+2{,}75}=\begin{vmatrix}z=t-0{,}5\\dz=dt\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{13}{5}\int\frac{dz}{z^2+2{,}75}=\frac{13}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2{,}75}}arctg\frac{z}{\sqrt{2{,}75}}+C=\frac{13}{5\sqrt{2{,}75}}arctg\frac{t-0{,}5}{\sqrt{2{,}75}}+C.$$

Об'єднавши ці два результати і, ввівши зворотну заміну, остаточно матимемо:

$$\int\frac{3\ln x+5}{x\left(\ln^2x-\ln x+3\right)}dx=\frac{3}{2}\ln\left|\ln^2x-\ln x+3\right|+\frac{39}{10\sqrt{2{,}75}}arctg\frac{\ln x-0.5}{\sqrt{2{,}75}}+C.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що таке раціональна функція?
2. Який раціональний дріб називають правильним? Неправильним?
3. Які ви знаєте типи елементарних дробів?
4. Як можна обчислити інтеграли від елементарного дробу першого чи другого типу?

Навчальні завдання

22. Знайти інтеграли

а) $\int\frac{7dx}{3x+4}$; *б)* $\int\frac{1{,}5dx}{6x-1}$; *в)* $\int\frac{dx}{0{,}3x+2}$; *г)* $\int\frac{9dx}{(x+2)^2}$; *д)* $\int\frac{4dx}{(2x+8)^4}$; *е)* $\int\frac{0{,}5dx}{(x-5)^3}$; *є)* $\int\frac{4x-31}{x^2+3x+10}dx$; *ж*$\int\frac{-x+11}{x^2+x+5}dx$); *з)* $\int\frac{-4x}{x^2-x+7}dx$; *й)* $\int\frac{x+9}{x^2+2x+8}dx$; *к)* $\int\frac{8x+10}{x^2+7x-8}dx$; *л)* $\int\frac{-x+11}{x^2-x-2}dx$; *м)* $\int\frac{x^2+3x-4}{x^3-8}dx$; *н)* $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$; *п)* $\int\frac{19x+40}{x^3-x^2-20x}dx$.

23. Знайти інтеграли і результат інтегрування перевірити диференціюванням :

а) $\int\frac{3x-4}{2x+5}dx$; *б)* $\int\frac{2x+7}{4x-3}dx$.

24. Знайти інтеграли

а) $\int\frac{5x^3-4x^2-29x-13}{x^2-x-6}dx$; *б)* $\int\frac{3x^3-7x+1}{x^2+2x-5}dx$; *в)* $\int\frac{2x+5}{(4x+4)^3}dx$;

г) $\int\frac{3x-6}{(3x+5)^4}dx$; *д)* $\int\frac{8x^2+30x+20}{x^3+4x^2+4x}dx$; *е)* $\int\frac{6e^x-22}{e^{2x}-6e^x+37}e^xdx$;

є) $\int\frac{8tgx+2}{(tgx-1)\cos^2x}dx$; *ж)* $\int\frac{3\sqrt{x}+39}{\left(x+5\sqrt{x}-14\right)\sqrt{x}}dx$

Завдання для самостійної роботи

25.Знайти інтеграли

а) $\int \frac{2x+3}{x^2-2x+6}dx$; *б)* $\int \frac{3x+39}{x^2+5x-14}dx$; *в)* $\int \frac{5x^3+x+7}{x^2-2x+3}dx$;

г) $\int \frac{4x+3}{(2x-3)^5}dx$; *д)* $\int \frac{4\sin x-17}{(\sin x)^2+3\sin x+12}\cos x dx$; *е)* $\int \frac{(e^x+5)e^x}{e^{2x}+e^x+6}dx$.

§ 5. *ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ*

5.1. Основні поняття

Інтеграли не від будь-якої ірраціональної функції виражаються в елементарних функціях. Тому ми розглянемо лише ті випадки, коли шляхом заміни змінної можна звести інтеграл від ірраціональної функції до інтеграла від раціональної функції. Останній інтеграл завжди виражається в елементарних функціях.

Функцію $r(u_1; u_2;\ldots;u_n)$ називають *раціональною* відносно вказаних аргументів, якщо над аргументами виконується скінчене число операцій додавання, віднімання, множення і ділення. Самі ж аргументи можуть бути ірраціональними.

Приклад 1. Функція $f(x)=x+\frac{\sqrt{x}+\sqrt[7]{x^6}}{1-\sqrt[5]{x^2}}$ є ірраціональною. Введемо позначення $u_1=x; u_2=\sqrt{x}; u_3=\sqrt[7]{x^6}; u_4=\sqrt[5]{x^2}$.

Одержана функція $r(u_1;u_2;u_3;u_4)=u_1+\frac{u_2+u_3}{1-u_4}$ являється раціональною відносно вказаних аргументів.

5.2. *Інтеграли вигляду*

$$\int R\left(x;\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}};\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}};\ldots;\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}};\right)dx,$$

де $m_1,\ldots m_p, n_1,\ldots n_p$ – цілі числа, причому $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$, і функція R є раціональною відносно вказаних аргументів.

Такий інтеграл можна звести до інтегралу від раціональної функції заміною $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де k – найменше спільне кратне чисел $n_1; n_2;\ldots;n_p$.

Окремим випадком таких інтегралів є інтеграли вигляду:

$$\int R\left(x; x^{\frac{m_1}{n_1}}; \ldots; x^{\frac{m_p}{n_p}}\right)dx.$$

В цьому випадку має місце заміна $x = t^k$, де k – найменше спільне кратне чисел $n_1; n_2; \ldots; n_p$.

Приклад2 . Зайти інтеграл *а*) $\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x+1}-1)\sqrt[3]{x+1}}$; *б*) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

Розвязання. *а*) Найменшим спільним кратним чисел 6 і 3 є число 6. Тому введемо заміну $x+1=t^6$.

Отже,

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x+1}-1)\cdot\sqrt[3]{x+1}} = \left|\begin{array}{l} x+1=t^6 \\ dx = 6t^5dt \\ t=\sqrt[6]{x+1}\end{array}\right| = \int \frac{6t^5dt}{(t-1)t^2} = 6\int \frac{t^3}{t-1}dt = 6\int \frac{t^3-1+1}{t-1}dt = 6\int \frac{t^3-1}{t-1}dt +$$

$$+6\int \frac{1}{t-1}dt = 6\int \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t-1}dt + 6\int \frac{1}{t-1}dt = 6\int (t^2+t+1)dt + 6\int \frac{1}{t-1}dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t\right) + 6\ln|t-1| + C = 2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C =$$

$$= 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x+1}-1\right| + C.$$

б) Перепишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$\frac{x+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{6}}}{x\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Найменшим спільним кратним знаменників дробів $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ є число 6, тому вводимо заміну $x=t^6$.

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx = \left|\begin{array}{l} x=t^6 \\ dx=6t^5dt \\ t=\sqrt[6]{x}\end{array}\right| = \int \frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}6t^5dt = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{(1+t^2)}dt =$$

$$= 6\int\left(\frac{t^3(t^2+1)+1}{1+t^2}\right)dt == 6\int\left(t^3+\frac{1}{1+t^2}\right)dt = 6\left(\frac{t^4}{4}+arctgt\right)+C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+arctg\sqrt[6]{x}+C$$

5.3. Інтеграли вигляду $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$.

Диференціальним біномом називають вираз $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, де *m,n,p*— раціональні числа.

Інтеграл від диференціального бінома зводиться до інтеграла від раціональної функції у наступних трьох випадках.

Випадок 1) Число *p* ціле. В цьому випадку виконують заміну $x=t^k$, де *k* – спільний знаменник чисел *m* і *n* . Тоді $dx=k\cdot t^{k-1}dt$. В результаті одержимо інтеграл $\int t^{km}\left(a+bx^{kn}\right)^p kt^{k-1}dt$, який є інтегралом від раціональної функції.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$.

Розвязання. Тут $m=-\frac{1}{2},\quad n=\frac{1}{4},\quad p=-10$– ціле тому $x=t^4,\quad dx=4\cdot t^3dt$.

Після заміни матимемо

$$\int\frac{4t^3dt}{t^2(t+1)^{10}}=4\int\frac{tdt}{(t+1)^{10}}=4\int\frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}dt=4\int\frac{dt}{(t+1)^9}-4\int\frac{dt}{(t+1)^{10}}=$$

$$=4\left(\frac{-1}{8}\cdot\frac{1}{(t+1)^8}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(t+1)^9}+C\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9}+C.$$

Випадок 2) Число $\frac{m+1}{n}$ ціле. Підстановкою $a+bx^n=t^s$ (де *s*–знаменник числа *p*) інтеграл $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ зводиться до інтегралу від раціональної функції.

Випадок 3) Число $\frac{m+1}{n}+p$ ціле. Підстановкою $\frac{a+bx^n}{x^n}=t^s$ (де *s*–знаменник числа *p*) інтеграл $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ зводиться до інтегралу від раціональної функції.

У всіх інших випадках інтеграл від диференціального бінома через елементарні функції не виражається.

5.4. Інтегрування функцій, раціональних відносно аргументу і квадратного кореня із квадратного тричлена

Інтеграли вигляду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можна звести до інтегралів від раціональної функції за допомогою *підстановок Ейлера*:

а) Нехай *a*>0, тоді зробимо заміну $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x$– *підстановка Ейлера*. Піднесемо обидві частини рівності до квадрату $ax^2+bx+c=t^2\pm2t\sqrt{a}x+ax^2$, звідси

$x = \dfrac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}}$ – раціональна функція ідносно t. А отже і dx також буде раціональною функцією.

Приклад 4. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.

Розвязання. Вводимо заміну $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - x$. Піднесемо обидві частини рівності до квадрату

$$x^2 + 2x + 2 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 2}{2 + 2t} \qquad \Rightarrow dx = \frac{2t2(1+t) - 2(t^2 - 2)}{4(t+1)^2} dt \qquad \Rightarrow$$

$$dx = \frac{t^2 + 2t + 2}{2(t+1)^2} dt .$$

Тому $1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 1 + t - x = 1 + t - \dfrac{t^2 - 2}{2 + 2t} = \dfrac{2(1+t)^2 - (t^2 - 2)}{2(t+1)} = \dfrac{(t+2)^2}{2(t+1)}$.

В результаті заміни отримуємо інтеграл:

$$\int \frac{2(t+1)}{(t+2)^2} \cdot \frac{t^2 + 2t + 2}{2(t+1)^2} dt = \int \frac{t^2 + 2t + 2}{(t+2)^2 (t+1)} dt = \int \frac{t^2 + 4t + 4 - 2t - 2}{(t+2)^2 (t+1)} dt = \int \left(\frac{(t+2)^2}{(t+2)^2 (t+1)} + \frac{-2(t+1)}{(t+2)^2 (t+1)} \right) dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+2)^2} \right) dt = \ln|t+1| + \frac{2}{t+2} + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1\right| + \frac{2}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2} + C.$$

2) Якщо *a*<0, а *c*>0 то інтеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ перетворюється у інтеграл від раціональної функції підстановкою $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$.

3) Розглянемо випадок, коли многочлен ax^2+bx+c має два різних дійсних корені, тобто $D > 0$. (Інші випадки не розглядаються, оскільки при умові $a<0$ і $D<0$ многочлен ax^2+bx+c набуває лише від′ємних значень). В цьому випадку виконуємо заміну $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$, де α – один із коренів. Звідси отримаємо:

$$ax^2 + bx + c = (x - \alpha)^2 t^2 \Rightarrow a(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)^2 t^2 \Rightarrow x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2} = \varphi(x) –$$

раціональна функція, а тому і $dx = \varphi'(x)$ також буде раціональною функцією.

Приклад 5. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{2x - x^2}}$.

Розвязання. Многочлен $2x\text{-}x^2$ має два корені $x_1 = 0;\ x_2 = 2$. Розглянемо заміну $\sqrt{2x - x^2} = xt$, (якщо в ролі α взяти $x_1 = 0$)

$$2x - x^2 = x^2 t^2 \Rightarrow x = \frac{2}{1 + t^2}; \quad dx = -\frac{4tdt}{(1 + t^2)^2}; \quad x + \sqrt{2x - x^2} = x + xt = \frac{2(1+t)}{1 + t^2}.$$

В результаті заміни отримаємо інтеграл:

$$-\int \frac{1 + t^2}{2(1+t)} \cdot \frac{4tdt}{(1 + t^2)^2} = -2\int \frac{tdt}{(1+t)(1 + t^2)}.$$

Підінтегральний дріб правильний, але неелементарний. Розкладемо його на суму елементарних дробів.

$$\frac{t}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1}=\frac{At^2+A+Bt^2+Bt+Ct+C}{(t+1)(t^2+1)}.$$

Звідси

$$\begin{cases} A+B=0, \\ B+C=1, \\ A+C=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-0{,}5, \\ B=0{,}5, \\ C=0{,}5. \end{cases}$$

Тому

$$-2\int\frac{tdt}{(1+t)(1+t^2)}=-2\int\frac{-0{,}5}{t+1}dt-2\int\frac{0{,}5t+0{,}5}{t^2+1}dt = \ln|1+t|-\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|-arctgt+C$$

Ввівши зворотну заміну остаточно маємо

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{2x-x^2}}=\ln\left|1+\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}\right)^2\right|-arctg\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}+C=$$

$$=\ln\left|1+\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}\right|-arctg\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}+C.$$

Зауваження. Підстановки Ейлера повністю вирішують питання про інтегрування вказаних функцій, але часто вони приводять до досить складних раціональних функцій. Тому вони мають ільш теоретичне, аніж практичне значення. А для обчислення інтегралів $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ користуються іншими методами.

Розглянемо часткові випадки вказаних інтегралів

1) $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$; 2) $\int\left(P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$; 3) $\int\frac{dx}{(x-\beta)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Покажемо, що інтеграли типів 2) і 3) можна легко звести до інтегралу 1).

Для зведення інтегралу типу 2) до інтегралу типу 1) достатньо чисельник і знаменник домножити на $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Дійсно $\int\left(P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int\frac{P(x)_n(ax^2+bx+c)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{P_{n+2}(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Для зведення інтегралу типу 3) до інтегралу типу 1) застосовують так звану “зворотну підстановку” $x-\beta=\frac{1}{v}$. Тоді $x=\frac{1+\beta v}{v}$, а $dx=-\frac{dv}{v^2}$.

$$\int\frac{dx}{(x-\beta)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\int\frac{v^n dv}{v^2\sqrt{\frac{a(1+\beta v)^2}{v^2}+\frac{b(1+\beta v)}{v}+c}}=\int\frac{v^{n-1}dv}{\sqrt{a_1v^2+b_1v+c_1}},$$ де

a_1, b_1, c_1 коефіцієнти, одержані після зведення подібних доданків.

Розглядаючи інтеграли виду $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ можна показати, що

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (*)$$

Практично при обчисленні вказаного типу інтегралів застосовується *метод невизначених коефіцієнтів.* Для цього записують інтеграл за ормулою (*), в якій λ – невизначений коефіцієнт і $Q_{n-1}(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами із степенем на одиницю нижчим, ніж многочлен $P_n(x)$.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів диференціюють обидві частини рівності (*), потім домножують на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ і, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях *x*, знаходять невідомі коефіцієнти.

Зауваження. Формулою (*) зручно користуватись тоді, коли степінь многочлена $P_n(x)$ вищий за одиницю; якщо ж це лінійний многочлен, то краще скористатись тим способом, який розглядався при інтегруванні елементарних дробів другого виду.

Приклад 6. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{(3x^3-7x^2+1)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; *б*) $\int \frac{4dx}{x^3\sqrt{4x^2-1}}$; *в*) $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Розвязання.

а) Застосуємо формулу (*)

$$\int \frac{(3x^3-7x^2+1)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{x^2-2x+5} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Продиференціюємо обидві частини цієї рівності.

$$\frac{(3x^3-7x^2+1)}{\sqrt{x^2-2x+5}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5} + \frac{\left(Ax^2+Bx+C\right)}{\sqrt{x^2-2x+5}}(x-1) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Домножимо ліву та праву частини рівності на $\sqrt{x^2-2x+5}$.

$$3x^3-7x^2+1 = 2Ax^3-4Ax^2+10Ax+Bx^2-2Bx+5B+Ax^3-Ax^2+Bx^2-Bx+Cx-C+\lambda$$

$$3x^3-7x^2+1 = 3Ax^3+x^2(-5A+2B)+x(10A-3B+C)x+5B-C+\lambda$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях *x.*

$$\begin{cases} 3A=3, \\ -5A+2B=-7, \\ 10A-3B+C=0, \\ 5B-C+\lambda=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=-13, \\ \lambda=-7. \end{cases}$$

Підставивши знайдені значення в розклад будемо мати:

$$\int\frac{(3x^3-7x^2+1)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\left(x^2-x-13\right)\sqrt{x^2-2x+5}-7\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=$$

$$=\left(x^2-x-13\right)\sqrt{x^2-2x+5}-7\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C.$$

б) Застосуємо так звану "зворотну підстановку" $x=\dfrac{1}{v}$, тоді $dx=-\dfrac{dv}{v^2}$.

$$\int\frac{4dx}{x^3\sqrt{4x^2-1}}=-\int\frac{4v^3dv}{v^2\sqrt{4\frac{1}{v^2}-1}}=-\int\frac{4v^2dv}{\sqrt{4-v^2}}.$$

Тепер можна записати одержаний інтеграл за формулою (*)

$$-\int\frac{4v^2dv}{\sqrt{4-v^2}}=\left(Av+B\right)\sqrt{4-v^2}+\lambda\int\frac{dv}{\sqrt{4-v^2}}.$$

Продиференціюємо обидві частини одержаної рівності

$$-\frac{4v^2}{\sqrt{4-v^2}}=A\sqrt{4-v^2}+\frac{\left(Av+B\right)(-v)}{\sqrt{4-v^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{4-v^2}}.$$

Домножимо на $\sqrt{4-v^2}$

$$-4v^2=4A-Av^2-Av^2-Bv+\lambda.$$

Звідси маємо $\begin{cases}-2A=-4,\\ -B=0,\\ 4A+\lambda=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2,\\ B=0,\\ \lambda=-8.\end{cases}$

А тому $\displaystyle\int\frac{4dx}{x^3\sqrt{4x^2-1}}=-\int\frac{4v^2dv}{\sqrt{4-v^2}}=\left(2v+0\right)\sqrt{4-v^2}-8\int\frac{dv}{\sqrt{4-v^2}}=$

$$=\frac{2}{x}\sqrt{4-\frac{2}{x^2}}-8\arcsin\frac{1}{2x}+C.$$

в) Так як у чисельнику маємо многочлен першого степеня, то застосовувати формулу (*) у даному випадку не раціонально. А тому виділимо у чисельнику похідну від підкореневого виразу і розіб'ємо одержаний інтеграл на два.

$$\int\frac{\left(3x-1\right)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2-2-\frac{2}{3}}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx+\frac{3}{2}\int\frac{-\frac{8}{3}}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx.$$

Розглянемо кожен інтеграл окремо

$$\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\begin{vmatrix}t=x^2+2x+2\\ dt=\left(2x+2\right)dx\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x^2+2x+2}+C.$$

$$-\frac{8}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=-\frac{8}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1+1}}=-\frac{8}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=\begin{vmatrix}t=x+1\\ dt=dx\end{vmatrix}=-\frac{8}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=-\frac{8}{3}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=-\frac{8}{3}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right|+C.$$

Об'єднавши обидва результати разом, маємо

$$\int\frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=3\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{8}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

Запитання для самоперевірки

1. Яка функція називається раціональною відносно вказаних аргументів?
2. У яких випадках можна застосовувати підстановки Ейлера?
3. Яке значення мають підстановки Ейлера?
4. Що називають диференціальним біномом?
5. За якою формулою зручно обчислювати інтеграли вигляду $\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$?

Навчальні завдання

26. Знайти інтеграли

а) $\int\frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}$; в) $\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$; г) $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$;

д) $\int\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$; е) $\int\frac{dx}{(\sqrt{x-2}-\sqrt[3]{x-2})\sqrt[6]{(x-2)^5}}$; є) $\int\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx$;

ж) $\int\frac{x-1}{\sqrt{1-4x-x^2}}dx$; з) $\int\frac{(5-x)dx}{\sqrt{x^2+2x-5}}$.

27. Знайти інтеграли методом невизначених коефіцієнтів:

а) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$; б) $\int\frac{(x^3-x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; в) $\int\frac{(x^3-6x^2+11x-6)dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$;

г) $\int\sqrt{4x^2-4x+1}dx$; д) $\int\frac{(x^2+2x+3)dx}{\sqrt{-x^2+4x}}$; е) $\int\sqrt{6x-x^2}dx$.

28. Знайти інтеграли використовуючи зворотну підстановку

а) $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}$; б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$; в) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{3x+4+x^2}}$;

г) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$; д) $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}$; е) $\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

29. Раціоналізувати підінтегральний вираз:

а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$; б) $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$; в) $\int \sqrt{x}\left(1+2\sqrt[6]{x}\right)^3 dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$; д) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$; е) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$; є) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x}(\sqrt[3]{x}-1)^2}$; ж) $\int \frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{x^2-1}}$;

з) $\int \frac{\sqrt{5+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; й) $\int \sqrt[3]{x}\sqrt{5x\sqrt[3]{x}+3}dx$.

Завдання для самостійної роботи

30. Знайти інтеграли

а) $\int \frac{dx}{(1-\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

31. Знайти інтеграл методом невизначених коефіцієнтів

$$\int \frac{(2x^2-x-5)dx}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

32. Знайти інтеграли використовуючи зворотну підстановку

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x+x^2}}$.

33. Раціоналізувати підінтегральний вираз:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt[8]{x}-1)^5}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$.

§ 6. *ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ*

6.1. *Універсальна тригонометрична підстановка*

Інтеграли вигляду $\int \mathrm{R}(\sin x, \cos x)dx$, де R– раціональна функція від вказаних аргументів підстановкою $t = tg\frac{x}{2}$ зводяться до інтегралів від раціональних функцій, які завжди виражаються у елементарних функціях.

Підстановку $t = tg\frac{x}{2}$ називають *універсальною тригонометричною підстановкою.* При цьому

$$\sin x=\frac{\sin 2\frac{x}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos 2\frac{x}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ \frac{x}{2}=arctgt\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Отже,

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

Приклад1. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}$.

Розвязання. Застосуємо універсальну підстановку :

$$\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=\left|\begin{array}{ll} t=tg\frac{x}{2}, & \cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, & dx=\frac{2dt}{1+t^2}; \end{array}\right|=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(9+8\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)}==$$

$$2\int\frac{dt}{t^2+2t+17}=2\int\frac{dt}{(t+1)^2+16}=\frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4}+C.$$

Зауваження. Універсальна підстановка зводить вказані типи інтегралів до інтегралів від раціональних функцій. Проте іноді вона приводить до інтегралів від досить складних раціональних функцій. Тому розглянемо інші прийоми інтегрування тригонометричних виразів.

6.2. Інтеграли вигляду $\int R(\cos x)\cdot\sin^{2n+1}x\,dx$, $\int R(\sin x)\cdot\cos^{2n+1}x\,dx$, де n – ціле число.

Для зведення першого з них до інтегралу від раціональної функції потрібно використати заміну $t=\cos x$, а другого – $t=\sin x$.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$.

Розвязання. Оскільки в даному прикладі $\cos x$ у непарному степені, то вводимо заміну $t=\sin x$, тоді

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}{\sin^6 x}dx=\left|\begin{array}{l} t=\sin x \\ \mathrm{dt=cosxdx} \end{array}\right|=\int\frac{\left(1-t^2\right)}{t^6}dt=\int\left(t^{-6}-t^{-4}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{5t^5}+\frac{1}{3t^3}+C==-\frac{1}{5\sin^5 x}+\frac{1}{3\sin^3 x}+C.$$

Розглянемо інтеграли вигляду

$\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx$; $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx$ та $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx$.

Якщо $\alpha \neq \beta$, то для знаходження таких інтегралів зручно застосувати тригонометричні формули:

1) $\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right)$,

2) $\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right)$,

3) $\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)x - \cos(\alpha-\beta)x\right)$.

Якщо $\alpha = \beta$, то використовують формули

4) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; 5) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; 6) $\sin \alpha x \cdot \cos \alpha x = \frac{1}{2}\sin 2\alpha x$.

Приклад 3. Знайти інтеграл *а)* $\int \cos 8x \cdot \cos 5x dx$; *б)* $\int \sin^2 6x \cdot \cos^2 6x dx$.

Розвязання.

а) $\int \cos 8x \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos(8+5)x + \cos(8-5)x)dx = \frac{1}{2}\int \cos 13x dx + \frac{1}{2}\int \cos 3x dx =$

$= \frac{1}{26}\sin 13x + \frac{1}{6}\sin 3x + C$.

б) Так як обидві функції мають парні показники, то застосовуючи формули 6 та 4 маємо

$\int \sin^2 6x \cdot \cos^2 6x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 12x dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 24x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{192}\sin 24x + C$

6.3. Деякі застосування тригонометричних підстановок для раціоналізації підінтегральної функції

Для раціоналізації деяких ірраціональних функцій також застосовуються тригонометричні підстановки:

1) інтеграли вигляду $\int R\left(x; \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ зводяться до інтегралів від раціональних функцій підстановками $x = a\sin t$ або $x = a\cos t$;

2) інтеграли вигляду $\int R\left(x; \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$ зводяться до інтегралів від раціональних функцій підстановкою $x = atgt$;

3) для інтегралів $\int R\left(x; \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ застосовують підстановку $x = \frac{a}{\sin t}$.

Приклад 4. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій, використовуючи тригонометричні підстановки:

а) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$; в) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

Розвязання.

а) $$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \\ t = \arcsin x \end{array} \right| = \int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = 2\int 2\cos^2 t\,dt =$$

$$= 2\int (1+\cos 2t)\,dt = 2t + \sin 2t + C = 2\arcsin\frac{x}{2} + 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} + 2\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)} + C = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C$$

б) $$\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} \left| \begin{array}{l} x = 3tgt \\ dx = \dfrac{3dt}{\cos^2 t} \\ t = arcrg\,\dfrac{x}{3} \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{3dt}{\cos^2 t}}{(9tg^2 t+9)\sqrt{9tg^2 t+9}} = \int \frac{\dfrac{3dt}{\cos^2 t}}{\dfrac{9}{cos^2 t}\sqrt{\dfrac{9}{\cos^2 t}}} =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{\cos^3 t\,dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{9}\int \cos t\,dt = \frac{1}{9}\sin t + C = \sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{x}}{3}\right) + C.$$

в) $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sin t} \\ dx = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt \\ t = \arcsin\dfrac{1}{x} \end{array} \right| = -\int \frac{\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt}{\dfrac{1}{\sin^2 t}\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t}-1}} =$$

$$= -\int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{\dfrac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}} = -\int \frac{\sin t\cdot\cos t\,dt}{\cos t} == -\int \sin t\,dt = \cos t + C = \cos\left(\arcsin\frac{1}{\mathrm{x}}\right) + C =$$

$$= \sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)} + C = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + C.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що являє собою універсальна тригонометрична підстановка?
2. Знаходження інтегралів типу $\int \mathrm{R}(\cos x)\cdot\sin^{2n+1}x\,dx$, $\int \mathrm{R}(\sin x)\cdot\cos^{2n+1}x\,dx$, де n – ціле число.
3. Які перетворення потрібно виконати для знаходження таких інтегралів: $\int \sin ax\cos bx\,dx$; $\int \sin ax\sin bx\,dx$; $\int cosax\cos bx\,dx$?

4. Застосування тригонометричних підстановок для раціоналізації підінтегральної функції в інтегралах вигляду $\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$; $\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$; $\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$.

Навчальні завдання

34. Знайти інтеграли

а) $\int e^{\sin x} cosx dx$; *б)* $\int \sqrt{2\sin x-1}\cos x dx$; *в)* $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$; *г)* $\int \frac{\sqrt{5tgx}dx}{\cos^2 x}$;

д) $\int \frac{\sin x dx}{4\cos x-7}$; *е)* $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx$; *є)* $\int \sin^8 x\cos^2 x dx$; *ж)* $\int \cos 5x\cos 2x dx$;

з) $\int \sin 5x\sin 2x dx$; *й)* $\int \cos 3x\sin 5x dx$; *к)* $\int \cos 3x\cos 5x\cos 8x dx$; *л)* $\int \frac{dx}{3+5\sin x}$;

м) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\mathrm{cosx}}$; *н)* $\int \frac{dx}{4+7\cos x}$; *п)* $\int \frac{dx}{5\sin x+3\mathrm{cosx}+3}$.

35. Знайти інтеграли, використовуючи тригонометричні підстановки:

а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{5-x^2}}$; *б)* $\int \frac{\sqrt{\tilde{o}^2-25}}{\tilde{o}^2}dx$; *в)* $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$; *г)* $\int \sqrt{25-x^2}dx$; *д)* $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$; *е)* $\int \sqrt{1-4x-x^2}dx$; *є)* $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(16+x^2)^5}}$; *ж)* $\int \frac{\sqrt{\tilde{o}^2+64}}{\tilde{o}}dx$.

36. Визначити метод інтегрування для обчислення інтеграла:

а) $\int \arccos 2x dx$; *б)* $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$; *в)* $\int 8^{x+3}(5x^2-2x+3)dx$; *г)* $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x}(\sqrt[3]{x}-1)^2}$;

д) $\int (2x+3x^2)\ln x dx$; *е)* $\int 2^{5x}\sin(3-4x)dx$; *є)* $\int \frac{5x+9}{x^2+6x+5}dx$; *ж)* $\int \frac{\ln x}{4x^8}x dx$.

Завдання для самостійної роботи

39. Знайти інтеграли

а) $\int e^{cosx}\sin x dx$; *б)* $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x}$; *в)* $\int \sin^6 x\cos^3 x dx$; *г)* $\int \sin 2x\sin 8x dx$; *д)* $\int \sin 2x\sin 3x\sin 5x dx$; *е)* $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$; *є)* $\int \frac{dx}{3\cos x+2}$.

40. Знайти інтеграли, використовуючи тригонометричні підстановки:

а) $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$; *б)* $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$.

Глава 7.
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§ *1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ*

1.1. Визначений інтеграл як границя інтегральної суми

Нехай на відрізку $[a;b]$ задано неперервну функцію $y = f(x) \geq 0$. Плоску фігуру $aABb$, обмежену графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a;b]$, $a < b$, осі Ox і прямими $x = a, x = b$, називають ***криволінійною трапецією.***

Знайдімо площу S цієї трапеції.

1. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ довільно на n частин за допомогою точок $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Таке розбиття будемо називати T– розбиттям.

Проводячи вертикальні прямі, $x = x_i$, $i = 1,2,3....(n-1)$, поділяємо криволінійну трапецію на n ділянок площею ΔS_i, $i = 1,2,3....n$.

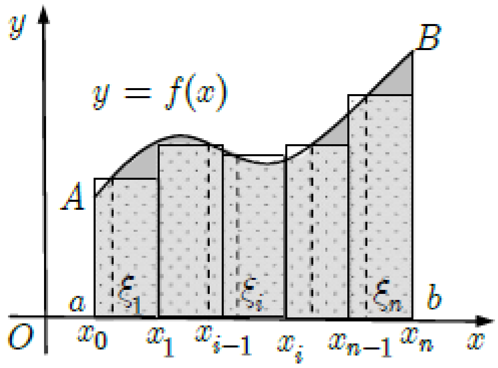


Рис. 7.1

2. Виберемо на кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ точку ξ_i. І будуємо прямокутник з основою $[x_{i-1}; x_i]$ заввишки $f(\xi_i)$.

.

Тоді

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad \text{де} \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

3. Одержимо «східчасту» фігуру, утворену з n прямокутників, площа якої

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

4. Точність наближення зростатиме, якщо відрізок $[a;b]$ ділитимемо так, щоб кількість ділянок n збільшувалась, а їхні довжини Δx_i зменшувались.

Нехай $\lambda(T) = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \to 0$ і $n \to \infty$.

Площею криволінійної трапеції $aABb$ називають

$$S = \lim_{\substack{\lambda(T)\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Суму вигляду $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ називають **і*нтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Ця границя, якщо вона існує, не повинна залежати ані від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини ані від вибору точок на них.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми, коли довжина найбільшої частинки прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття, ані від вибору точок на кожній частинці, то цю границю називають ***визначеним інтегралом на відрізку*** $[a;b]$ від функції $f(x)$ і позначають

$$\int_a^b f(x)dx$$

При цьому числа a і b називають відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування.

У випадку, коли границя інтегральної суми для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ існує, функцію називають інтегрованою на цьому відрізку.

Будь-яка неперервна функція на відрізку $[a;b]$ інтегрована на цьому відрізку.

1.2. Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо $f(x) = c = const$, то $\int_a^b cdx = c \cdot (b-a)$.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

5. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$.

6. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$, де С – стала.

7. Якщо $f(x) \geq 0$ при $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

8. Якщо $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

9. Якщо $m \leq f(x) \leq M$ на $[a;b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

10. *Теорема про середнє значення*. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то знайдеться така точка $c \in (a;b)$, що

$$\int_a^b f(x)dx = c\cdot(b-a).$$

§ 2. *ПРАВИЛА ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ*

2.1. Формула Ньютона–Лейбніца

Для обчислення визначеного інтеграла від функції $f(x)$ в тому випадку, коли первісна функція $F(x)$ виражається у елементарних функціях, використовують формулу *Ньютона–Лейбніца:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}. \qquad (1)$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int_1^4 \frac{5\sqrt{x}+x^3-5x}{x}dx.$$

Розв'язання. Розіб'ємо даний дріб на окремі доданки, знайдемо первісну одержаного виразу та застосуємо формулу Ньютона-Лейбніца.

$$\int_1^4 \frac{5\sqrt{x}+x^3-5x}{x}dx = \int_1^4\left(5x^{-\frac{1}{2}}+x^2-5\right)dx = \left(5\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{x^3}{3}-5x\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$=\left(\left(10\sqrt{4}+\frac{4^3}{3}-5\cdot 4\right)-\left(10\sqrt{1}+\frac{1^3}{3}-5\cdot 1\right)\right)=20+\frac{64}{3}-20-10-\frac{1}{3}+5=-5+21=16$$

2.2. *Інтегрування частинами*

Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні при $x\in[a;b]$, то

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}. \qquad (2)$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_1^2 x^3\ln x\,dx$.

Розв'язання.

$$\int_1^2 x^3\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\ln x, & dv = x^3dx, \\ du=\dfrac{dx}{x}; & v=\dfrac{x^4}{4}; \end{matrix}\right| = \frac{1}{4}x^4\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2\frac{1}{4}x^4\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$=\frac{1}{4}2^4\ln 2-\frac{1}{4}1^4\ln 1-\frac{1}{16}x^4\Big|_1^2 = 4\ln 2-\frac{1}{16}(16-1)=4\ln 2-\frac{15}{16}.$$

2.3. Метод підстановки

Нехай виконуються такі умови:

1) функція $f(t)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$;

2) функції $\varphi(x)$ та $\varphi'(x)$ – неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$, де $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

3) при $x\in[\alpha;\beta]$ значення функції $\varphi(x)$ належить відрізку $[a;b]$.

Тоді $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int\limits_{a}^{b} f(t)dt$. (3)

Дану формулу можна записати у вигляді

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\left|\begin{array}{l} t=\varphi(x) \\ dt=\varphi'(x)dx \\ a=\varphi(\alpha) \\ b=\varphi(\beta) \end{array}\right|=\int\limits_{a}^{b} f(t)dt. \quad (4)$$

Приклад 3. Обчислити інтеграли

а) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(5x+3)^5}$; *б*) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{7+\cos x}dx$; *в*) $\int\limits_{1}^{27}\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$.

Розв'язання.

а) $$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(5x+3)^5}=\left|\begin{array}{l} t=5x+3, \\ dt=5dx, \\ x=-1, t=-2; \\ x=0, \quad t=3; \end{array}\right|=\frac{1}{5}\int\limits_{-2}^{3}t^{-5}dt=\frac{1}{5}\cdot\frac{t^{-4}}{-4}\Bigg|_{-2}^{3}=-\frac{1}{20}\left(\frac{1}{81}-\frac{1}{16}\right)=\frac{13}{5184}.$$

б) $$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{7+\cos x}dx=\left|\begin{array}{l} t=7+\cos x, \\ dt=-\sin x dx, \\ x=0, \quad t=8; \\ x=\frac{\pi}{3}, t=7{,}5; \end{array}\right|=-\int\limits_{8}^{7{,}5}\frac{dt}{t}.$$

Так як нижня межа більша за верхню, поміняємо межі, змінивши при цьому знак інтеграла

$$\int\limits_{7{,}5}^{8}\frac{dt}{t}=\ln t\Big|_{7{,}5}^{8}=\ln 8-\ln 7{,}5=\ln\frac{16}{15}.$$

У деяких прикладах формулу (4) можна використовувати в такому вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ x = a,\ t = \alpha; \\ x = b,\ t = \beta \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\,. \qquad (5)$$

в) $$\int_1^{27} \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5dt \\ x = 1,\ t = 1 \\ x = 27, t = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^6+t^4+t}{t^6\left(1+t^2\right)}\cdot 6t^5dt = 6\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^5+t^3+1}{\left(1+t^2\right)}dt =$$

$$= 6\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^3\left(t^2+1\right)+1}{1+t^2}dt == 6\int_1^{\sqrt{3}}\left(t^3+\frac{1}{\left(1+t^2\right)}\right)dt = 6\left(\frac{t^4}{4}+arctgt\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 6\left(\left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^4}{4}+arctg\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1^4}{4}+arctg1\right)\right) = 6\left(\frac{9}{4}+\frac{\pi}{3}-\frac{1}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = 12+\frac{\pi}{2}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Дати означення інтегральної суми.
2. Що називають визначеним інтегралом?
3. Властивості визначених інтегралів.
4. Сформулювати теорему про існування визначеного інтеграла.
5. Теорема про середнє значення визначеного інтеграла.
6. Записати формулу Ньютона –Лейбніца.
7. Користуючись якою формулою можна обчислити визначений інтеграл за частинами?
8. При виконанні яких умов можна обчислити визначений інтеграл методом підстановки?
9. Записати таблицю первісних.

Навчальні завдання

41. Користуючись формулою Ньютона –Лейбніца, обчислити інтеграли.

а) $\int_1^2 \left(5x^4\right)dx$; б) $\int_0^5 \left(-5e^x\right)dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos x\right)dx$; г) $\int_1^2 \left(4x^3-5\right)dx$;

д) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$; е) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; є) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; ж) $\int_5^7 \frac{dx}{x^2-16}$.

42. Відстань між двома містами велосипедист проїхав за 3 години, рухаючись із змінною швидкістю $v(t)=8t^2+4t-2$ (êì/ãîä). Яка відстань між містами?

43. Обчислити за частинами вказані інтеграли.

а) $\int\limits_1^3 5x^4\ln x dx$; *б)* $\int\limits_1^3 \left(x^2+4\right)\ln x dx$; *в)* $\int\limits_2^4 \frac{\ln x}{x^4}dx$; *г)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}(2x+6)\sin x\,dx$; *д)* $\int\limits_0^{\pi}(11-9x)\cos x\,dx$; *е)* $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-7)\sin x\,dx$.

44. Використовуючи третє правило знаходження первісних обчислити інтеграли*а)* $\int\limits_1^2 7^{3x-4}dx$; *б)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}}\cos 12x\,dx$; *в)* $\int\limits_0^1 e^{7x-12}dx$; *г)* $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{(7+4x)^3}$;

д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{7}}\frac{dx}{\cos^2 7x}$; *е)* $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{2}{5}}\sin(5x+3)dx$; *є)* $\int\limits_0^2\sqrt{8x+9}\,dx$; *ж)* $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^0 6^{5x+2}dx$;

з) $\int\limits_1^2(7x-9)^4dx$; *й)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)}$.

45. Використовуючи метод заміни змінної обчислити інтеграли

а) $\int\limits_1^2\frac{(6x-5)dx}{3x^2-5x+4}$; *б)* $\int\limits_0^1\frac{e^x\,dx}{5-4e^x}$; *в)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\,dx}{1+3\cos x}$; *г)* $\int\limits_0^1\frac{x^2\,dx}{13-9x^3}$;

д) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tgx\,dx$; *е)* $\int\limits_e^{e^2}\frac{dx}{x\cdot\ln x}$; *є)* $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx$; *ж)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x+9}$;

з) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\sin x-1}\cos x\,dx$; *й)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos x\,dx$; *к)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x\sqrt{\cos x}}$; *л)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}$.

Завдання для самостійної роботи

46. Обчислити інтеграли

а) $\int\limits_0^{\pi}\sin 3x dx$; *б)* $\int\limits_2^3\left(9x^2+7\right)dx$; *в)* $\int\limits_2^4\frac{dx}{x^2-9}$; *г)* $\int\limits_2^4\frac{dx}{x^2-9}$; *д)* $\int\limits_2^3\frac{\ln x}{x^3}dx$;

е) $\int\limits_{2}^{3} x^2 \ln x dx$; є) $\int\limits_{-2}^{2} (1-x)\sin \pi x\, dx$; ж) $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} e^{4-3x} dx$; з) $\int\limits_{0}^{1} (5x-2)^3$;

й) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{5x}\, dx}{2-e^{5x}}$; к) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctgx\, dx$; л) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x \sin x\, dx$; м) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x\, dx$.

47. Виїхавши зі станції електропотяг через t годин має прискорення $a = 3t^2 - 42t + 80$ êì /ãîä . Знайти швидкість електропотяга через 1*год*. після початку руху та шлях, пройдений ним за цей час.

§ 3. *НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ*

Запроваджуючи поняття визначеного інтеграла як границі інтегральної суми, припускають, що виконано такі умови:

1) межі інтегрування a та b скінченні;

2) підінтегральна функція f на відрізку $[a;b]$ неперервна або має скінченну кількість точок розриву 1-го роду.

Інтеграли з нескінченними межами інтегрування та інтеграли від розривних функцій називають ***невласними.***

3.1. *Інтеграли з нескінченними межами інтегрування*

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна для всіх *x* із проміжку $[a;+\infty)$. Тоді невласний інтеграл з нескінченною верхньою межею інтегрування визначається таким чином:

$$\boxed{\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx}. \tag{6}$$

Якщо ця границя число, то невласний інтеграл називають ***збіжним,*** якщо ж границя нескінченна чи не існує – ***розбіжним.***

Аналогічно визначається невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею інтегрування:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx} \tag{7}$$

та невласні інтеграли з двома нескінченними межами інтегрування:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{c}^{b} f(x)dx}, \tag{8}$$

де *c*– довільне дійсне число.

3.2. Інтеграли від розривних функцій

Нехай функція $y=f(x)$ визначена і неперервна для всіх *x* із відрізка $[a;b]$, крім точки *c* $(c\in[a;b])$, в які функція має нескінченний розрив. Тоді невласний інтеграл від розривної функції визначається так:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\eta\to 0}\int_{c+\eta}^b f(x)dx}, \tag{9}$$

де ε і η змінюються незалежно одна від одної.

Якщо обидва інтеграли у правій частині рівності (9) існують і вони скінченні, то невласний інтеграл називають ***збіжним***, в протилежному випадку – ***розбіжним***.

Приклад 5. Знайти невласні інтеграли:

а) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$; б) $\int_{-\infty}^0 3e^x dx$.

Розв'язання. *а*) Використовуючи формулу (6) будемо мати

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b x^{-4}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-3}}{-3}\right)\Bigg|_2^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3b^3}+\frac{1}{3\cdot 2^3}\right)=\frac{1}{24}\ .$$

б) За формулою (7)

$$\int_{-\infty}^0 3e^x dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 3e^x dx=\lim_{a\to-\infty}\left(3e^x\right)\Big|_a^0=\lim_{a\to-\infty}\left(3e^0-3e^a\right)=3.$$

Приклад 6. Дослідити інтеграл на збіжність *а*) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$; *б*) $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}$.

Розв'язання. *а*) Розіб'ємо цей інтеграл на суму двох інтегралів (за формулою (8)).

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\left(arctgx\Big|_a^0\right)+\lim_{b\to+\infty}\left(arctgx\Big|_0^b\right)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(arctg0-arctga\right)+\lim_{b\to+\infty}\left(arctgb-arctg0\right)=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}-0=\pi\ .$$

Оскільки обидві границі існують і вони скінченні то інтеграл збіжний.

б) На відрізку $[-1;1]$ функція $y=\frac{1}{x^2}$ має точку розриву $x=0$, тому його шукатимемо за формулою (9)

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\eta\to 0}\int_{0-\eta}^1\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon}\right)+\lim_{\eta\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Bigg|_{0-\eta}^1\right)=\infty-1-1+\infty=\infty.$$

Границі не є скінченими, тому даний невласний інтеграл є розбіжним.

Запитання для самоперевірки

1. Які інтеграли називають невласними?

2. Які є типи невласних інтегралів?

3. Які невласні інтеграли називають збіжними? розбіжними?

Навчальні завдання

48. Знайти невласні інтеграли.

а) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^5}$; *б)* $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+9}$; *в)* $\int_{0}^{+\infty}\sin x dx$;

г) $\int_{1}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^3+1}$; *д)* $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$.

49. Дослідити інтеграл на збіжність.

а) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$; *б)* $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; *в)* $\int_{0}^{3}\frac{dx}{(x-2)^4}$;

г) $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^7}dx$; *д)* $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Завдання для самостійної роботи

50. Дослідити інтеграл на збіжність.

а) $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+10x+26}$; *б)* $\int_{1}^{+\infty}\frac{x^4+1}{x^5}dx$; *в)* $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$;

г) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^x dx$; *д)* $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2-1}$.

§ 4. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

4.1. Прикладне застосування визначеного інтеграла

1) Якщо плоску фігуру задано неперервною невід′ємною функцією $y=f(x)$, $x\in[a;b]$, прямими $x=a$, $x=b$ та віссю *Ох* то її площа

$$S=\int_{a}^{b}f(x)dx$$ – *геометричний зміст інтеграла.* (1)

2) Якщо тіло рухається прямолінійно зі змінною швидкістю $v=v(t)$,то шлях *S*, пройдений тілом за час від t_1 до t_2, визначають за формулою

$$S=\int_{t_1}^{t_2}v(t)dt$$ – *механічний зміст інтеграла*. (2)

3) Якщо змінна сила $F = F(x)$ діє вздовж осі Ox, то робота цієї сили на відрізку $[a; b]$ дорівнює

$$A = \int_a^b F(x)dx \text{ – } \textit{фізичний зміст інтеграла}. \qquad (3)$$

4) Якщо $v = v(t)$ – швидкість зростання популяції, то приріст її чисельності за час від t_0 до T дорівнює

$$p = \int_{t_0}^T v(t)dt \text{ – } \textit{біологічний зміст інтеграла}. \qquad (4)$$

5) Якщо $v = v(t)$ – швидкість хімічного перетворення, то кількість речовини *m*, що вступила в хімічну реакцію за час від t_0 до Т, визначають за формулою

$$m = \int_{t_0}^T v(t)dt \text{ — } \textit{хімічний зміст інтеграла}. \qquad (5)$$

6) Якщо $p = p(t)$ — продуктивність праці в момент часу *t*, то обсяг N випущеної продукції за проміжок часу $[t_o; T]$ становить

$$N = \int_{t_0}^T p(t)dt \text{ – } \textit{економічний зміст інтеграла}. \qquad (6)$$

Приклад 1. Швидкість руху тіла змінюється за законом $v(t) = \sqrt{19 + 6t}$ *м/с*. Знайти шлях пройдений тілом за час від $t_1 = 1\,c$ до $t_2 = 5\,c$.

Розв'язання. Для обчислення довжини пройденого шляху скористаємось механічним змістом інтеграла

$$S = \int_1^5 \sqrt{19 + 6t}dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{2\sqrt{(19 + 6t)^3}}{3}\Bigg|_1^5 = \frac{\sqrt{(19 + 6t)^3}}{9}\Bigg|_1^5 = \frac{343}{9} - \frac{125}{9} = \frac{218}{9} \text{ (}\textit{м}\text{)}.$$

Приклад 2. Знайти роботу, яка затрачається на розтяг пружини на 8 *см*, коли для розтягу її на 2 *см* прикладається сила в 4 *Н*.

Розв'язання. Як відомо, розтяг гвинтової пружини відбувається пропорційно прикладеній силі. Нехай, наприклад, s – це розтяг пружини, що виражається у метрах. Тоді $F = ks$, де k – коефіцієнт жорсткості. При $s = 0{,}02$ *м* $F = 4H$, отже з рівності

$4 = 0{,}02k$ знаходимо $k = 200$, тому $F = 200s$.

Роботу обчислимо за формулою (3)

$$A = \int_0^{0{,}08} 200s\,ds = 100s^2\Big|_0^{0{,}08} = 100 \cdot (0{,}08)^2 = 0{,}64 \text{ (}\textit{Дж}\text{)}.$$

Приклад 3. Розтягуючи пружину на 0,04 *м*, виконали роботу в 20 *Дж*. На яку довжину можна розтягнути пружину, виконавши роботу у 80 *Дж*?

Розв'язання. Виходячи із умови задачі зайдемо *k*:

$$20=\int_0^{0,04}kxdx=k\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,04}=k\cdot\frac{0,04^2-0}{2}=0,0008k$$. Звідки $k=\frac{20}{0,0008}=25000\,(Н/м)$.

За даними $k=25000\,(Н/м)$ і $A=80$ *Дж* знайдемо розтяг.

$A=\int_0^{x_1}kxdx$, де x_1 – видовження пружини при виконанні роботи у 80 *Дж.*

$$80=\int_0^{x_1}25000xdx=25000\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{x_1}=12500x_1^2$$, звідки $x_1^2=\frac{80}{12500}=\frac{4}{625}$, $x_1=\frac{2}{25}=0,08\,(м)$.

Приклад 4. Швидкість зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначалась формулами: $V'(t)=5+2\cdot\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t)=9-2\cdot\sqrt[4]{t^3}$, де V i D вимірювались у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, одержаний за цей час.

Розв'язання. Метою всякого виробництва є досягнення максимального прибутку, тобто, досягнення максимальної різниці між доходами та видатками. Позначимо $P(t)$, $D(t)$, $V(t)$ відповідно функції залежності прибутку, доходу та видатків від часу. В такому випадку $P(t)= D(t) - V(t)$. Функція досягає свого екстремуму, якщо її похідна дорівнює нулю $P'(t)= D'(t) -V'(t)$. Тобто, звідки $D'(t)=V'(t)$. З рівняння

$5+2\cdot\sqrt[4]{t^3}=9-2\cdot\sqrt[4]{t^3}$ визначаємо $4\cdot\sqrt[4]{t^3}=4\Rightarrow t=1$.

Отже, таке підприємство було прибутковим 1 рік. За цей час воно одержало прибуток на суму

$$P=\int_0^1\left(D'(t)-V'(t)\right)dt=\int_0^1\left(9-2\cdot\sqrt[4]{t^3}-5-2\cdot\sqrt[4]{t^3}\right)dt=\int_0^1\left(4-4\cdot\sqrt[4]{t^3}\right)dt=$$

$$=\left(4t-4t^{\frac{7}{4}}\cdot\frac{4}{7}\right)\Bigg|_0^1=4-\frac{16}{7}=1\frac{5}{7}$$ *(млн. грн.).*

Приклад 5. Обчислити тиск води на прямокутні ворота шлюзу, ширина якого 30*м* і глибина 10*м*, якщо її верхня грань лежить на поверхні води.

Розв'язання. За законом Паскаля тиск *P* рідини, густина якої ρ, на площадку S при глибині занурення h дорівнює $P=\rho ghS$, де $g=9,8\ {}^{м}\!/\!_{с^2}$ - прискорення вільного падіння. Елементарна прямокутна пластина, що міститься на глибині *x* має площу $dS=adx$, тут *a*- ширина пластини. Отже,

$$P=\int_0^h\rho gxdS=\rho g\int_0^h xadx=\rho ga\int_0^h xdx.$$

Підставляючи числові значення маємо

$$P=1000\cdot 9,8\cdot 30\int_0^{10}xdx=294000\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{10}=147000\cdot 10^2=1,47\cdot 10^7\,H.$$

4.2. Обчислення площ плоских фігур

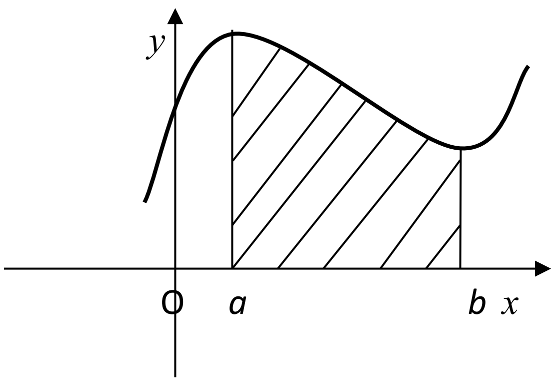


Рис. 7.2

1. Площа *S* криволінійної трапеції (рис. 7.2) визначається за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{7}$$

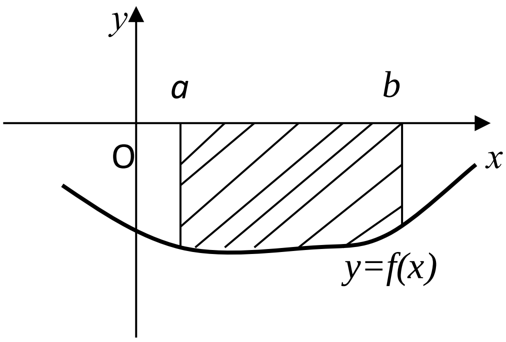


Рис. 7.3

2. Якщо на відрізку $[a;b]$ $f(x) \le 0$ (рис. 7.3), або функція змінює свій знак скінчену кількість разів (мал. 7. 4), то площу утвореної фігури зручно шукати за формулою

$$S = \int_a^b |f(x)|dx. \tag{8}$$

3. Якщо фігура обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$, де $c > d$, причому $\varphi(y) \ge 0$, якщо $y \in [c;d]$ (рис. 7.5), функція $x = \varphi(y)$– неперервна, тоді площа такої фігури *S* обчислюється за формулою

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy. \tag{9}$$

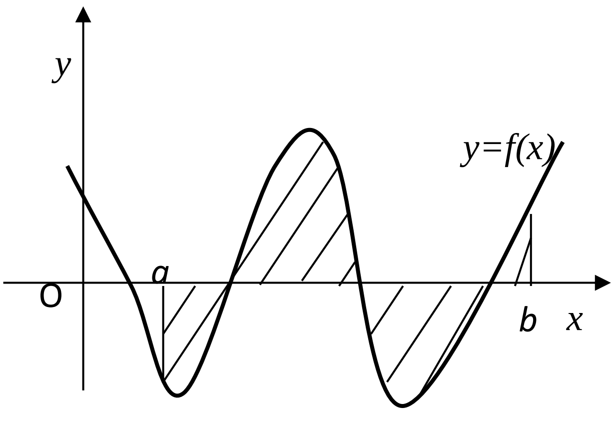


Рис. 7.4

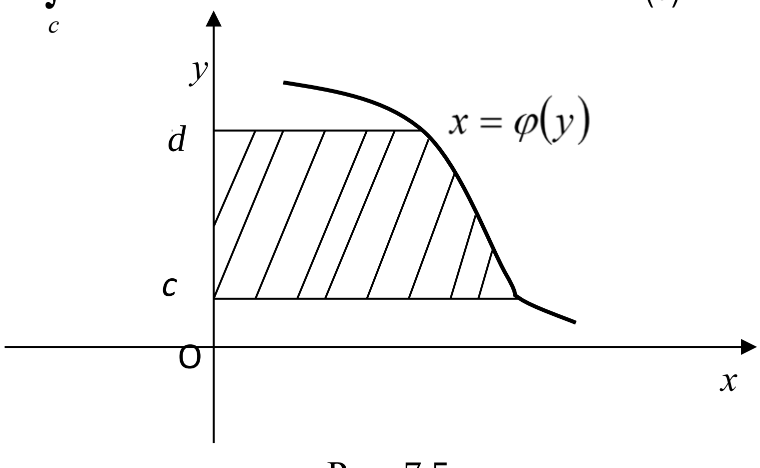


Рис. 7.5

4. Площа фігури, обмеженої двома неперервними кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \ge f_2(x)$ на відрізку $[a;b]$) і двома прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 7.6) обчислюється за формулою

$$S=\int_a^b\big(f_1(x)-f_2(x)\big)dx\,. \tag{10}$$

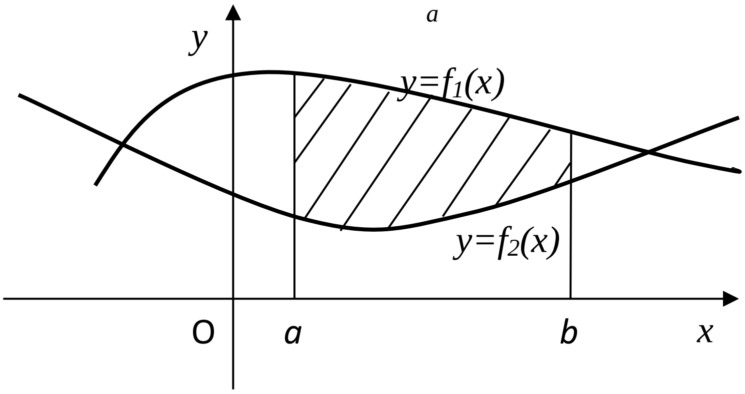


Рис. 7.6

5. Якщо крива задана параметрично $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою та прямими $x=a$, $x=b\ (b>a)$ знаходиться за формулою

$$S=\int_{t_1}^{t_2}y(t)\cdot x'(t)dt\,, \tag{11}$$

де t_1 і t_2 визначаються із рівнянь $a=x(t_1)$, $b=y(t_2)$ ($y(t)\geq 0$ при $t_1\leq t\leq t_2$).

6. Нехай у полярній системі координат крива задана рівнянням $\rho=\rho(\theta)$.

Плоску фігуру обмежену кривою $\rho=\rho(\theta)$ та двома прямими $\theta=\theta_0$ і $\theta=\theta_1$ називають *криволінійним сектором* (рис. 7.7).

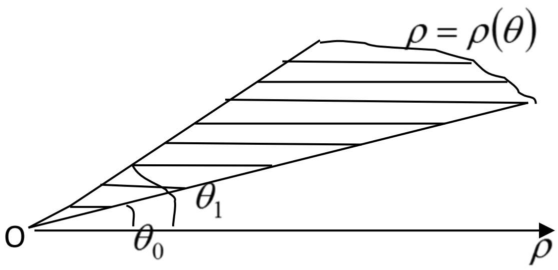


Рис. 7.7.

Площу криволінійного сектора можна обчислити за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\rho^2(\theta)d\theta\,. \tag{12}$$

Приклад 6. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y=4^x$, $x=1$, $x=3$ та $y=0$; *б)* $y=3x^3$, $x=-2$, $x=4$ та $y=0$;

в) $y=\log_3 x$, $y=1$, $y=5$та $x=0$; *г)* $y=x^2+4x$, $y=x+4$;

д) $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$, $y = 0$.

Розв'язання. *а)* покажемо схематично який вигляд має ця фігура (рис 7.8).

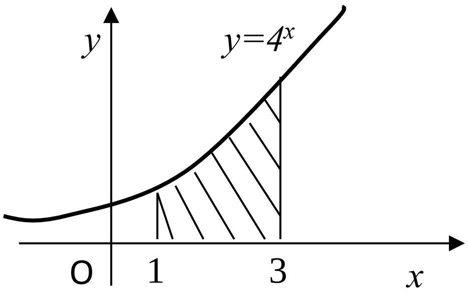


Рис. 7.8.

За означенням дана фігура є криволінійною трапецією. Тому обчислимо її площу за формулою (7)

$$S = \int_1^3 4^{\tilde{o}} dx = \left.\frac{4^x}{\ln 4}\right|_1^3 = \frac{4^3}{\ln 4} - \frac{4^1}{\ln 4} = \frac{60}{\ln 4}$$

б) Покажемо на рисунку 7.9 фігуру, площу якої необхідно знайти. Рівняння $y = 3x^3$ задає кубічну параболу.Так як фігура розміщена і нижче осі *Ох* і вище неї, то її площу шукатимемо за формулою (8).

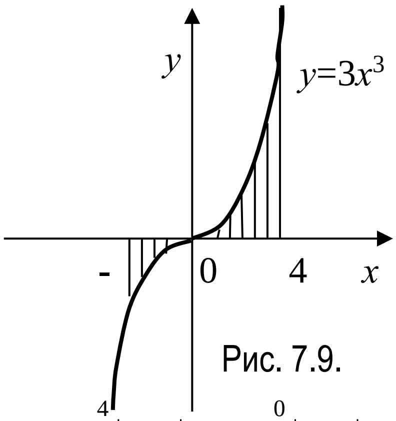


Рис. 7.9.

$$S = \int_{-2}^{4} \left|3x^3\right| dx.$$

Оскільки підінтегральна функція під модулем, то щоб знайти первісну необхідно спочатку розкрити модуль. Для цього розіб'ємо інтервал на якому здійснюється інтегрування на два:

1) $[-2;0]$, тут $3x^3 \le 0$;

2) $[0;4]$, на ньому $3x^3 \ge 0$.

$$S = \int_{-2}^{4} \left|3x^3\right| dx = \int_{-2}^{0} \left|3x^3\right| dx + \int_{0}^{4} \left|3x^3\right| dx = -\int_{-2}^{0} \left(3x^3\right) dx + \int_{0}^{4} \left(3x^3\right) dx =$$

$$= -\left.\left(3\frac{x^4}{4}\right)\right|_{-2}^{0} + \left.\left(3\frac{x^4}{4}\right)\right|_{0}^{4} = \frac{3}{4}\cdot(-2)^4 + \frac{3}{4}\cdot 4^4 = 12 + 192 = 204.$$

в) Покажемо схематичний рисунок 7.10.

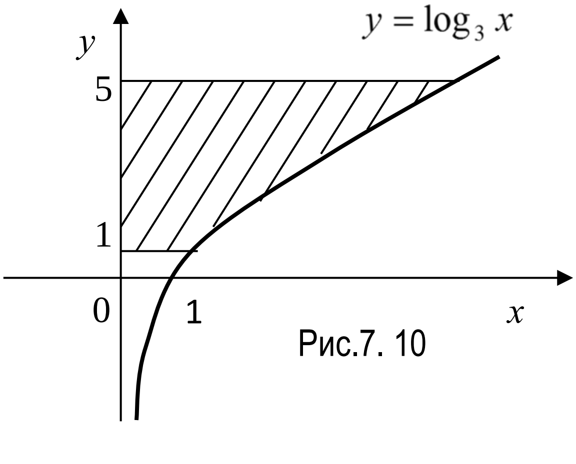


Рис.7. 10

Площу такої фігури шукатимемо користуючись формулою (9),

але спочатку потрібно ви разити *х* як функцію від *у*:

$$y = \log_3 x \Rightarrow x = 3^y.$$

$$S = \int_1^5 3^y dy = \left.\frac{3^y}{\ln 3}\right|_1^5 = \frac{3^5}{\ln 3} - \frac{3}{\ln 3} = \frac{243}{\ln 3} - \frac{3}{\ln 3} = \frac{240}{\ln 3}.$$

г) Фігура, площу якої ми будемо шукати у цьому прикладі, обмежена графіками двох функцій $y = x^2 + 4x$ та $y = x + 4$ (рис.7.11).

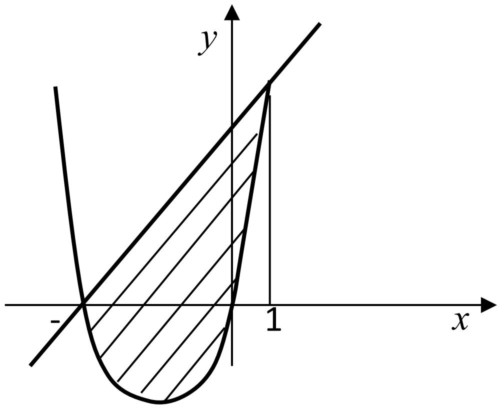


Рис.7. 11

І оскільки межі інтегрування не вказані, то ними виступатимуть точки перетину графіків. Знайдемо ці точки, прирівнявши функції

$x^2 + 4x = x + 4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 1$

.

На відрізку $[-4;1]$ виконується нерівність $x + 4 \geq x^2 + 4x$.

Тому, застосувавши формулу (10), площу цієї фігури обчислимо таким чином:

$$S = \int_{-4}^{1} \left(x + 4 - \left(x^2 + 4x\right)\right) dx = \int_{-4}^{1} \left(-x^2 - 3x + 4\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-4}^{1} = -\frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 - \left(\frac{64}{3} - 3 \cdot \frac{16}{2} - 16\right) = \frac{125}{6}$$

д) Оскільки крива задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \; y = 0,$$

то її площу знайдемо за формулою (11). Для цього знайдемо спочатку $x' = 5(1 - \cos t)$.

$$S = \int_{0}^{2\pi} 5(1 - \cos t) 5(1 - \cos t) dt = 25 \int_{0}^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 25 \int_{0}^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt =$$

$$= 25 \int_{0}^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = 25\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = 25 \cdot 3\pi = 75\pi.$$

4.3. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

1. Нехай на площині задано криву рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ і $f'(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ функції. Довжина дуги цієї кривої знаходиться за формулою

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx. \tag{13}$$

2. В тому випадку, коли крива задана рівняннями в параметричні формі $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

причому $x(t)$ і $y(t)$ – неперервні диференційовані функції, довжина дуги кривої, яка відповідає монотонному збільшенню параметра *t* від t_1 до t_2, обчислюється за формулою

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt\,. \qquad (14)$$

Приклад 7. Обчислити довжину дуги кривої:

а) $y^2=x^3$ від $x=0$ до $x=1$, ($y\ge 0$); *б)* $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t, 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання. *а)* для обчислення довжини дуги цієї кривої скористаємось формулою (13). Тому спочатку обчислимо похідну даної функції

$$y^2=x^3\Rightarrow\ \Rightarrow y=x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\left|\begin{array}{l} t=1+\frac{9}{4}x \\ dt=\frac{9}{4}dx \\ x=0,\ t=1 \\ x=1,\ t=3{,}25\end{array}\right|=\frac{4}{9}\int_1^{3,25}t^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{3,25}=\frac{8}{27}\left(3{,}25\sqrt{3{,}25}-1\right).$$

б) В даному випадку крива задана рівняннями в параметричні формі $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$ Отже, довжина дуги такої кривої обчислюється за формулою (14). Продиференціюємо по t обидва рівняння:

$x'=-12\cos^2 t\sin t$; $y'=12\sin^2 t\cos t$.

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(-12\cos^2 t\sin t\right)^2+\left(12\sin^2 t\cos t\right)^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}12\cos t\sin t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=-3\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-3\cos\pi+3\cos 0=3+3=6\,.$$

4.4. Обчислення об'єму тіла обертання

1. Розглянемо тіло, утворене обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої неперервною кривою $y=f(x)$, віссю Ox та прямими $x=a$, $x=b$, $a>b$ (рис. 7.12). У цьому разі для обчислення об'єму тіла обертання застосовують формулу

$$V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx\,. \qquad (15)$$

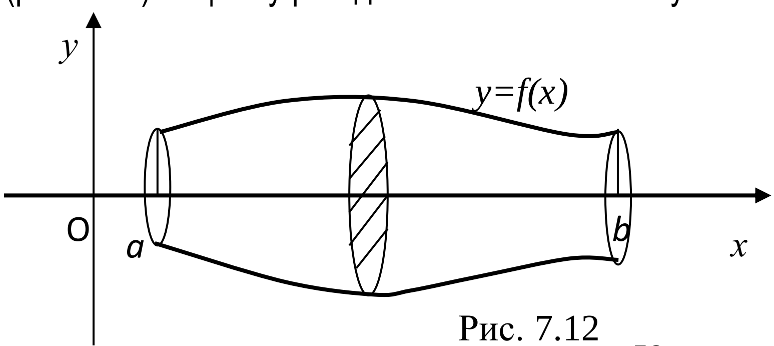


Рис. 7.12

2. Аналогічно, об'єм тіла обертання навколо осі Oy криволінійної трапеції, обмеженої неперервною кривою $x=\varphi(y)$, віссю ординат і двома прямими $y=c$, $y=d$ $(c<d)$ обчислюється за формулою

$$V=\pi\int_c^d(\varphi(y))^2\,dy. \tag{16}$$

Приклад 8. Обчислити об'єм тіла:

а) утвореного обертанням навколо осі *Ox* криволінійної трапеції, обмеженої гіперболою $y=\frac{4}{x}$, прямими $x=3$, $x=12$ та віссю абсцис;

б) утвореного обертанням навколо осі *Oy* спільної частини парабол, $y^2=8x$ і $y=x^2$.

Розв'язання. *а)* Покажемо на рисунку тіло, об'єм якого необхідно знайти (рис. 7.13).

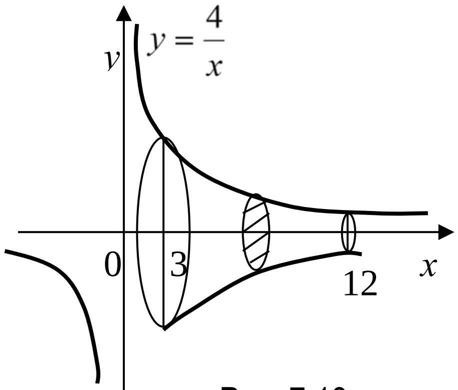


Рис. 7.13.

Користуючись формулою (15), знаходимо

$$V=\pi\int_3^{12}\left(\frac{4}{x}\right)^2dx=16\pi\int_3^{12}\frac{dx}{x^2}=$$

$$=-16\pi\frac{1}{x}\Big|_3^{12}=-16\pi\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\right)=4\pi.$$

б) Знайдемо точки перетину парабол (рис. 7.14) $y^2=8x$ і $y=x^2$.

$x^4=8x\Rightarrow x(x^3-8)=0\Rightarrow\quad x_1=0;\ y_1=0$ і. $x_2=2;\ y_2=4$

Об'єм тіла шукатимемо як різницю двох об'ємів: V_1– об'єму тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої параболою $y=x^2$ та прямою $y=4$ і V_2– об'єму тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої тією ж прямою $y=4$ та параболою $y^2=8x$. Для відшукання обох об'ємів скористаємось формулою (16).

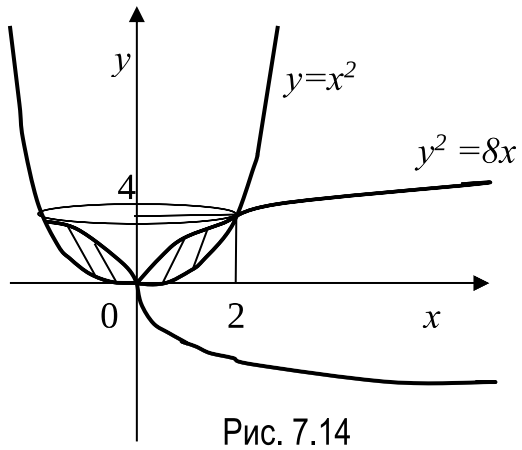


Рис. 7.14

$$V_1=\pi\int_0^4\left(\sqrt{y}\right)^2dy=\pi\int_0^4 y\,dy=\pi\frac{y^2}{2}\Big|_0^4=8\pi$$

$$V_2=\pi\int_0^4\left(\frac{y^2}{8}\right)^2dy=\pi\int_0^4\frac{y^4}{64}dy=\pi\frac{y^5}{320}\Big|_0^4=\pi\frac{4^5}{320}=$$

$$=\frac{16}{5}\pi.$$

Звідси шуканий об'єм дорівнюватиме $V=V_1-V_2=8\pi-\frac{16}{5}\pi=\frac{24}{5}\pi.$

Запитання для самоперевірки

1. Дати означення криволінійної трапеції.

2. В чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?

3. Як обчислити площу фігури, обмеженої кривою і прямими *y=c, y=d, x=0*?

4. За якою формулою обчислюється площа фігури, обмеженої графіками двох функцій?

5. Як знайти площу фігури, обмеженої графіком функції *y=f(x)*, якщо цей графік розміщений не лише в додатній півплощині?

6. Записати формулу для обчислення площі криволінійної трапеції, якщо функція задана параметрично.

7. Формула для обчислення довжини дуги кривої, якщо крива задана:

а) аналітично; б) параметрично.

8. За якою формулою можна обчислити об′єм тіла, якщо обертання здійснюється навколо осі *Ox*?

9. Як обчислюється об′єм тіла, якщо обертання здійснюється навколо осі *Oy*?

10. Який механічний зміст визначеного інтеграла?

11. Сформулюйте фізичний зміст визначеного інтеграла.

12. Пояснити хімічний зміст визначеного інтеграла.

13. Як ви розумієте економічний зміст визначеного інтеграла?

Навчальні завдання

51. Знайти площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями (зробити малюнок):

а) $y = 2x^2 + 4$, $x = -1$, $x = 3$, $y = 0$; *б)* $y = 7x - 3$, $x = 2$, $x = 5$, $y = 0$;

в) $y = \frac{5}{x}$, $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$; *г)* $y = 2x^3 + 1$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$;

д) $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$; *е)* $y = tgx$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$;

є) $y = 2^x$, $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$; *ж)* $y = \ln x$, $x = e$, $x = e^3$, $y = 0$;

з) $y = -\frac{2}{x}$, $x = -1$, $x = -4$, $y = 0$; *й)* $y = \frac{x}{5} + 5$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$.

52. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = \frac{x}{5}$, $x = -5$, $x = -1$, $y = 0$; *б)* $y = 7x - 3$, $x = -10$, $x = 5$, $y = 0$;

в) $y = x^2 - 9$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$; *г)* $y = 7x - 3$, $y = 2$, $y = 5$, $x = 0$;

д) $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 4$, $x = 0$; *е)* $y = \frac{5}{x}$, $y = 1$, $y = 5$, $x = 0$.

53. Обчислити площу фігури, обмежену кривими (зробити малюнок).

а) $y = x^2$, $y = 2 - x$; *б)* $y = 2x^2$, $y = x^2 + 1$; *в)* $y = \frac{2}{x}$, $x + y = 3$;

г) $y = x^2 + 2x + 2, \quad y = 2 - x^2$; *д)* $y = x^3$, $y = x$; *е)* $y = \frac{4}{x}, \quad x + y = 5$.

54. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями.

а) $y^2 = x$, $x = 9$; *б)* $y = 2x$, $x = 2$, $y = 0$;

в) $y = 2x - x^2$, $y = 0$; *г)* $y = \frac{6}{x}$, $1 \le x \le 6$.

55. Обчислити об'єм тіла обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями:

а) $x^2 + y^2 = 1$; *б)* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$; *в)* $x + y - 2 = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

56. Швидкість руху тіла змінюється за законом $v(t) = (3t^2 - 2t)$*м/с*. Знайти шлях, пройдений тілом за час від $t_1 = 0c$ до $t_2 = 4c$.

57. Тіло починає рухатись без початкової швидкості вздовж координатної прямої під дією сили $F = \pi^2 \cos\frac{\pi t}{2}$. Знайдіть роботу по переміщенню цього тіла на відрізку $[0;1]$.

58. Обчислити тиск води на прямокутні ворота шлюзу, ширина якого 30*м* і глибина 10*м*, якщо її верхня грань лежить на поверхні води. (тиск рідини *P*, густина якої ρ, на площадку *S* при глибині занурення *h* дорівнює $P = \rho g h S$).

59. Яку роботу потрібно витратити на стискання пружини на 4*см*, якщо відомо, що сила 2Н стискує цю пружину на 1*см*?

60. Сила 8Н розтягує пружину на 16*см*. Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягнути цю пружину на 24*см*?

Завдання для самостійної роботи

61. Знайти площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями (зробити малюнок):

а) $y = 3^x, x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0$; *б)* $y = 4x + 9$, $x = -2, \quad x = 6, \quad y = 0$;

в) $y = \cos x$, $x = -\frac{\pi}{3}, \quad x = \frac{\pi}{3}, \quad y = 0$.

62. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = 4x - 1$, $x = -5, \quad x = -3, \quad y = 0$; *б)* $y = \frac{8}{x}, \ y = 2, \quad y = 4, \quad x = 0$.

63. Обчислити площу фігури, обмежену кривими (зробити малюнок).

а) $y = x^2, \quad y = 8x - x^2$; *б)* $y = x^3, \quad y = 4x$.

64. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями.

а) $y = x^2 - 9$, $y = 0$; *б)* $y^2 = 6x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

65. Швидкість руху тіла змінюється за законом $v(t) = (17 - 5t)$*м/с*. Знайти шлях, пройдений тілом за час від $t_1 = 1c$ 1 до $t_2 = 12c$.

66. Обчислити об'єм тіла обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лінією

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів по модулю «Інтегральне числення функцій однієї змінної»

1. Знайти інтеграли:

1) $\int\left(\sqrt{x}+5x-x^{-1}\right)dx$;

2) $\int\left(\frac{3}{x^2}+2^x-1\right)dx$;

3) $\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\cos x+4\right)dx$;

4) $\int\left(2x^{-1,5}+5x^{-0,6}-4^{0,8}\right)dx$;

5) $\int\left(5-x^3+\cos x\right)dx$;

6) $\int\left(6x^3+4^x+8\right)dx$;

7) $\int 4\left(x^2-3+\cos x\right)dx$;

8) $\int\left(x^{-4}+8+\sin x\right)dx$;

9) $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}-7-\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$;

10) $\int\left(3^x-x^3+3^3\right)dx$;

11) $\int\left(4\sin x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+7\right)dx$;

12) $\int\left(3x^2-4^x+\frac{5}{5+x^2}\right)dx$;

13) $\int\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$;

14) $\int\left(x^4-5e^x+\cos x\right)dx$;

15) $\int\left(\frac{7}{x}+9^x+4\right)dx$;

16) $\int\left(\frac{1}{x^2+36}-3+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$;

17) $\int\left(9+\frac{4}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$;

18) $\int\left(5^x+1-\frac{3}{16+x^2}\right)dx$;

19) $\int\left(x^6+4-\frac{1}{x^2-9}\right)dx$;

20) $\int\left(9e^x-8-\frac{5}{x}\right)dx$;

21) $\int\left(x^9-\frac{3}{\sqrt{25-x^2}}+12\right)dx$;

22) $\int\left(\frac{24}{x}-\frac{3}{\cos^2 x}-5\right)dx$;

23) $\int\left(4^x-\frac{9}{36+x^2}+11\right)dx$;

24) $\int\left(x^{10}+\frac{4}{\sin^2 x}-8\right)dx$;

25) $\int\left(3\sin x+\frac{1}{x^2-1}+51\right)dx$;

26) $\int\left(\frac{4}{x^2+49}-\frac{7}{x}+25\right)dx$;

27) $\int\left(x^{\frac{1}{2}}-\cos x+4\right)dx$;

28) $\int\left(\frac{15}{x^2-3}+\frac{1}{\sqrt{81-x^2}}+13\right)dx$;

29) $\int\left(\frac{6}{\sqrt{x^2+7}}-x^{3,5}+2\right)dx$;

30) $\int\left(\frac{4}{9+x^2}-\frac{9}{x}+63\right)dx$.

2. Знайти інтеграли:

1) $\int\sqrt{2\sin x-1}\cos xdx$; 2) $\int\frac{(ctg7x-3)dx}{\sin^2 7x}$; 3) $\int e^{\sin x}cosxdx$;

4) $\int\frac{\cos xdx}{2\sin x+3}$; 5) $\int\sin^2 x\cos xdx$; 6) $\int\frac{\sin xdx}{\cos^2 x+9}$;

7) $\int\frac{\cos xdx}{\sin^4 x}$; 8) $\int\frac{\sin xdx}{2\cos x+5}$; 9) $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{\sin x}}$;

10) $\int\frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$; 11) $\int\frac{\sin xdx}{\cos^3 x}$; 12) $\int\sin x\cos xdx$;

13) $\int\frac{\sqrt{5tgx}dx}{\cos^2 x}$; 14) $\int e^{cosx}\sin xdx$; 15) $\int\frac{\sin xdx}{4\cos x-7}$;

16) $\int\cos^3 x\sin xdx$; 17) $\int\sqrt{5\sin x+7}\cos xdx$; 18) $\int\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$;

19) $\int e^{5\sin x+2}cosxdx$; 20) $\int\frac{\cos xdx}{4+\sin^2 x}$; 21) $\int\sin^4 x\cos xdx$;

22) $\int\frac{\sin x}{2+\cos x}dx$; 23) $\int\frac{1+tg3x}{\cos^2 3x}dx$; 24) $\int\sqrt[3]{3-4\sin x}\cos xdx$;

25) $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{1-\sin x}}$; 26) $\int\cos^7 x\sin xdx$; 27) $\int e^{7\cos x-4}\sin xdx$;

28) $\int\frac{\sin xdx}{\cos^2 x-5}$; 29) $\int e^{5\sin x-2}\cdot\cos xdx$; 30) $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}$.

3. Знати інтеграли:

1) $\int(x-7)\sin xdx$; 2) $\int(1-3x)\cos xdx$; 3) $\int(2x+5)\sin xdx$;

4) $\int(3x^2+2)\cos xdx$; 5) $\int(5-2x)\sin xdx$; 6) $\int(10+13x)\cos xdx$;

7) $\int(5x-17)\sin xdx$; 8) $\int(1+23x^2)\cos xdx$; 9) $\int(7x^2+1)\sin xdx$;

10) $\int(11-9x)\cos xdx$; 11) $\int(x^2+17)\sin xdx$; 12) $\int(5-3x^2)\cos xdx$;

13) $\int(5x-12)\sin xdx$; 14) $\int(1+9x^2)\cos xdx$; 15) $\int(x^2-21)\sin xdx$;

16) $\int(7+6x)\cos xdx$; 17) $\int(8x^2-7)\sin xdx$; 18) $\int(4+8x)\cos xdx$;

19) $\int(4x^2-9)\sin xdx$; 20) $\int(7-5x^2)\cos xdx$; 21) $\int(2x+6)\sin xdx$;

22) $\int(8-4x^2)\cos xdx$; 23) $\int(7x^2+15)\sin xdx$; 24) $\int(12-5x^2)\cos xdx$;

25) $\int(6x+11)\sin xdx$; 26) $\int(16-11x^2)\cos xdx$; 27) $\int(14x-3)\sin xdx$;

28) $\int(19-12x)\cos xdx$; 29) $\int(15x^2+4)\sin xdx$; 30) $\int(21+7x)\cos xdx$.

4. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{2x^3-27x-5}{x^2-3x-4}dx$; 2) $\int \frac{-4x^3+49x+84}{x^2-2x-8}dx$; 3) $\int \frac{6x^3-81x-95}{x^2-x-12}dx$;

4) $\int \frac{-6x^3+43x+43}{x^2-x-6}dx$; 5) $\int \frac{4x^3-17x-45}{x^2-2x-3}dx$; 6) $\int \frac{-2x^3+25x-33}{x^2-4x+3}dx$;

7) $\int \frac{-2x^3+56x-88}{x^2-6x+8}dx$; 8) $\int \frac{-2x^3+56x-88}{x^2-6x+8}dx$; 9) $\int \frac{8x^3-20x-3}{x^2-x-2}dx$;

10) $\int \frac{-6x^3+43x-29}{x^2+2x-3}dx$; 11) $\int \frac{6x^3-15x+24}{x^2+x-2}dx$; 12) $\int \frac{-10x^3+71x-72}{x^2+x-6}dx$;

13) $\int \frac{4x^3-89x+91}{x^2+4x-5}dx$; 14) $\int \frac{6x^3-15x+24}{x^2+x-2}dx$; 15) $\int \frac{12x^3-42x+15}{x^2+x-2}dx$;

16) $\int \frac{-10x^3+33x+20}{x^2-x-2}dx$; 17) $\int \frac{8x^3-60x-55}{x^2+3x+2}dx$; 18) $\int \frac{-8x^3+101x+66}{x^2-x-12}dx$;

19) $\int \frac{4x^3-83x-85}{x^2+5x+4}dx$; 20) $\int \frac{-6x^3+83x-45}{x^2+x-12}dx$; 21) $\int \frac{-4x^3+82x-45}{x^2+x-20}dx$;

22) $\int \frac{-2x^2+56x-88}{x^2-6x+8}dx$; 23) $\int \frac{8x^3-20x-3}{x^2-x-2}dx$; 24) $\int \frac{-4x^3+82x-45}{x^2+3x-20}dx$;

25) $\int \frac{12x^3-42x+15}{x^2+x-2}dx$; 26) $\int \frac{2x^3-71x-154}{x^2+7x+12}dx$; 27) $\int \frac{5x^3-2x+17}{x^2-x-12}dx$;

28) $\int \frac{3x^3-59x+16}{x^2+3x-4}dx$; 29) $\int \frac{2x^3-71x-154}{x^2-x-6}dx$; 30) $\int \frac{3x^3-22x-30}{x^2-x-6}dx$.

5. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+4})\sqrt[6]{(x+4)^5}}$ 2) $\int \frac{x^2dx}{(4x-3)\sqrt{4x-3}}$; 3) $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$;

4) $\int \frac{7+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$; 5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; 6) $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$;

7) $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1}dx$; 8) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; 9) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$;

10) $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$; 11) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}$; 12) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)\sqrt{x+3}}$;

13) $\int \frac{5+\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}}dx$; 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$; 15) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{5x+4}}dx$;

16) $\int \frac{\sqrt{x+25}}{x}dx$; 17) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt[3]{3x+22}}$; 18) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$;

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}-\sqrt[4]{2-3x}}$ 20) $\int \frac{x^2dx}{(5x-1)\sqrt{5x-1}}$; 21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$;

22) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x-9}+5\right)\sqrt{x-9}}$ 23) $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{5x+8}}$; 24) $\int \frac{\sqrt{x+16}}{x}dx$;

25) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(2+x)^2}-\sqrt{2+x}}dx$; 26) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x-4}+6}$; 27) $\int \frac{9-\sqrt{x+3}}{9+\sqrt[4]{x+3}}dx$;

28) $\int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{3-x}}$; 29) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{2+x}+\sqrt[6]{2+x}}dx$; 30) $\int \frac{11dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+2}}$.

6. Знайти інтеграли:

1) $\int \sin^2 x \cos x dx$; 2) $\int \sin^2 2x dx$; 3) $\int \cos^4 x dx$;

4) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$; 5) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$; 6) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x}dx$;

7) $\int \cos^2 4x dx$; 8) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; 9) $\int \cos^7 x dx$;

10) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$; 11) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$; 12) $\int \sin^3 5x dx$;

13) $\int \sin^6 3x dx$; 14) $\int \cos^5 3x dx$; 15) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx$;

16) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$; 17) $\int \sin^6 x dx$; 18) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$;

19) $\int \cos^3 2x dx$; 20) $\int \sin^3 2x \cos^5 2x dx$; 21) $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$;

22) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$; 23) $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$; 24) $\int \sin^4 3x dx$;

25) $\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^4 2x}dx$; 26) $\int \frac{\sin^3 x}{4+\cos x}dx$; 27) $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$;

28) $\int \sin^2 x \cos^6 x dx$; 29) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; 30) $\int \cos^5 x dx$.

7. Обчислити інтеграли:

1) $\int_1^2 (7x-9)^4 dx$; 2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} 6^{5x+2} dx$; 3) $\int_0^2 \sqrt{8x+9}\,dx$;

4) $\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{2}{5}} \cos(5x+3)dx$; 5) $\int_{-\frac{\pi}{16}}^{\frac{\pi}{16}} \sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)dx$; 6) $\int_{-\frac{1}{3}}^{0} e^{4-3x}dx$;

7) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{9x-7}}$; 8) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)dx$; 9) $\int_1^2 \frac{dx}{(5-3x)^2}$;

10) $\int_0^1 (5x-2)^3$;   11) $\int_0^{\frac{\pi}{7}} \frac{dx}{\cos^2 7x}$;   12) $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{-\frac{\pi}{16}} \cos(8x+\pi)$;

13) $\int_0^1 e^{7x-12}dx$;   14) $\int_{\frac{\pi}{24}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\sin^2 6x}$;   15) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(7+4x)^3}$;

16) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$;   17) $\int_0^{\frac{\pi}{15}} \sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)dx$;   18) $\int_2^3 \sqrt{4x-7}\,dx$;

19) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \sin\left(6x+\frac{\pi}{6}\right)dx$ 20) $\int_0^1 \sqrt[3]{7x-2}\,dx$;   21) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 12x\,dx$;

22) $\int_2^3 \frac{dx}{(7-2x)^3}$;   23) $\int_1^2 7^{3x-4}dx$;   24) $\int_0^1 \sqrt[3]{(3x-2)^5}\,dx$;

25) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(7x-6)^2}}$;   26) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(5x+16)^2}$;   27) $\int_0^{\frac{\pi}{10}} \frac{dx}{\sin^2\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}$;

28) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)}$;   29) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx$;   30) $\int_{\frac{1}{9}}^{1} \sqrt[3]{9x+7}\,dx$.

8. Обчислити інтеграли:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{cos\,x\,dx}{2\sin x+3}$;   2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx$;   3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x+9}$;

4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\sin x-1}\cos x\,dx$;   5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(ctg\,7x-3)dx}{\sin^2 7x}$;   6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\,dx$;

7) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x\sqrt{\cos x}}$;   8) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}$;   9) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx$;

10) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^4 x}$; 11) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{2\cos x+5}$; 12) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$;

13) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5\sin x+7}\cos x\,dx$; 14) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x \sin x\,dx$; 15) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sqrt[7]{ctg^4 x \cdot \sin^2 x}}$;

16) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{5tgx}\,dx}{\cos^2 x}$ 17) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x\,dx$; 18) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{4\cos x+2}$;

19) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sqrt{3-4\sin x}\cos x\,dx$; 20) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+tg3x\,dx}{\cos^2 3x}$; 21) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{\cos x+2}$;

22) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{5\sin x+2}\cos x\,dx$; 23) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+4}$; 24) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos x\,dx$;

25) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x+5}$; 26) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{3\sin x+1}\cos x\,dx$; 27) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2\cos x+1}}$;

28) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\sin x}}$; 29) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x \sin x\,dx$; 30) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{7\cos x}\sin x\,dx$.

9. Обчислити площу фігури, обмежену кривими (зробити рисунок).

1) $y=x^2-4$ та $y=4x+1$; 2) $y=-x^2$ та $x+y+2=0$; 3) $y=\frac{5}{x}$ та $y=6-x$;

4) $y=x^2+4x+4$ та $y=x+4$; 5) $y=\frac{6}{x}$ та $y=-x+5$; 6) $y=\sqrt{x}$ та $y=0{,}5x$;

7) $y=\frac{12}{x}$ та $y=-x+8$; 8) $y=4x-x^2$ та $y=4-x$; 9) $y=-x^2-4x$ та $y=x+4$;

10) $y=x^2$ та $y=2-x^2$; 11) $y=x^3$ та $y=2x$; 12) $y=x^2$ та $y^2=x$;

13) $y=x^2+1$ та $y=x+1$; 14) $y=\frac{4}{x}$ та $y=5-x$; 15) $y=2x^2$ та $y=3-x^2$;

16) $y=\sqrt{x}$ та $y=x$; 17) $y=x+6$ та $y=x^2$; 18) $y=\frac{7}{x}$ та $x+y-8=0$;

19) $y=-\frac{5}{x}$ та $y=x-6$; 20) $y=x^2$ та $y=x+2$; 21) $y^2=2x$ та $x=4$;

22) $xy=1$ та $x+y=2{,}5$; 23) $y=\frac{2}{x}$ та $y=-x+3$; 24) $y=6x^2$ та $y=2x^3$;

25) $y=x^2$ та $y=-x^2+8$; 26) $y=0{,}5x^2-x+1$ та $y=-0{,}5x^2+3x+6$ 27) $y=\frac{6}{x}$ та $y=7-x$;

28) $y=-x^2$ та $y=x^2-2$; 29) $y=x^2$ та $y=\sqrt{x}$; 30) $y=4-2x^2$ та $y=x^2-3x+4$.

10. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями.

1) $y^2=x$, $x=9$; 2) $y=2x$, $x=2$, $y=0$; 3) $y=x^2+2$, $y=2x+2$;

4) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$; 5) $y^2=2px$, $x=a$, $y=0$; 6) $y=x^3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;

7) $y=2x-x^2$, $y=0$; 8) $xy=9$, $y=10-x$; 9) $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$;

10) $y^2=(x-1)^3$, $x=2$; 11) $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$; 12) $y^2=x+4$, $4\le x\le 9$;

13) $y=\sqrt{tg\frac{x}{4}}$, $0\le x\le\pi$; 14) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$; 15) $xy=9$, $y=0$, $x=1$, $x=3$;

16) $y^2=4x$, $y=x$; 17) $y=e^{-x}+e^x$, $y=0$, $0\le x\le 1$; 18) $y=x\sqrt{x}$, $y=0$, $x=4$;

19) $y=x^2$, $y^2=x$; 20) $y=\sin^2 x$, $0\le x\le\pi$; 21) $y=3-x^2$, $y=x^2+1$;

22) $y=\frac{6}{x}$, $1\le x\le 6$; 23) $y=\sqrt{x}e^x$, $y=0$, $x=1$ 24) $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{x^3}{8}$;

25) $y=\sin x$, $y=0$; 26) $y^2=9x$, $y=3x$; 27) $x+2y-4=0$, $y=0$, $x=0$;

28) $y^2 = 6x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$; 29) $y = x^2 - 9$, $y = 0$; 30) $y = cosx$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Глава 8

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

§ 1. *ФУНКЦІЯ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ*

1.1. Функція, її границя та неперервність

Якщо кожній впорядкованій парі дійсних чисел $(x; y)$ з деякої множини $D(D \subset E_2)$ по певному правилу або закону відповідає одне і тільки одне дійсне число z, то кажуть, що *на множині* D *визначена функція двох змінних* x *та* y і записують $z = f(x, y)$.

Змінні x та y називають незалежними змінними або аргументами, а множину D – областю визначення функції $z = f(x, y)$.

Очевидно, область визначення функції двох змінних є деякою множиною на площині.

Приклад 1. Знайти і зобразити область визначення функції

$$y = \arccos\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}.$$

Розв'язання. Функція визначена при умові $-1 \le \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} \le 1$.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} \ge -1; \\ \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} \le 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - 1} \ge 0; \\ \frac{-x^2 - y^2 + 2}{x^2 + y^2 - 1} \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 > 1; \\ x^2 + y^2 \ge 2. \end{cases}$$

Областю визначення даної функції є множина точок, координати яких задовольняють нерівності $x^2 + y^2 \ge 2$.

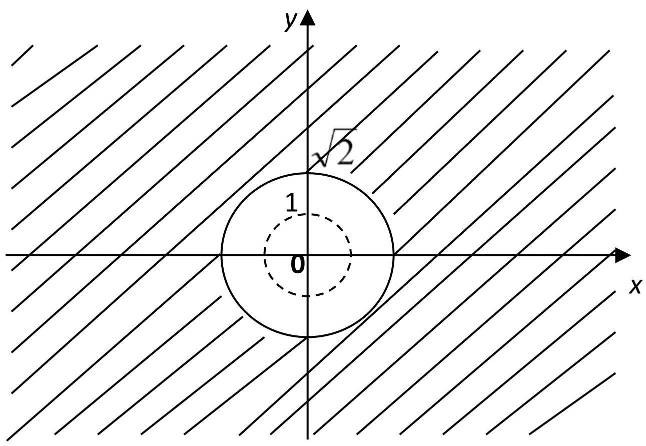


Рис. 8.1

Геометрично це означає, що область визначення складається з усіх точок площини, крім точок, які належать середині круга з центром (0; 0) та радіусом $\sqrt{2}$ (Рис. 8.1).

Графіком функції $z = f(x, y)$ називають *геометричне місце точок* $(x, y, f(x, y))$ *в просторі*, коли (x, y) пробігає всю область визначення функції.

Графік функції двох змінних є деякою поверхнею в просторі (рис. 8.2).

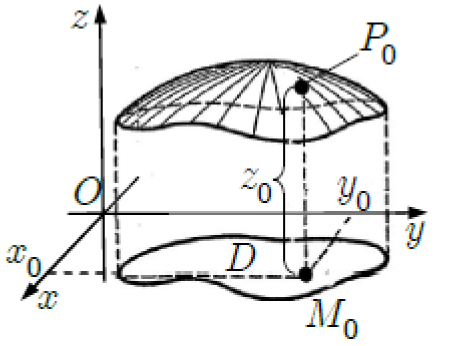


Рис. 8.2

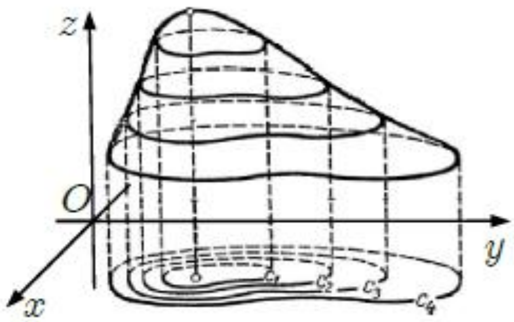


Рис. 8.3

Нехай D деяка множина n- вимірного евклідового простору E_n. Якщо кожній впорядкованій сукупності дійсних чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з множини D по певному правилу або закону відповідає одне і тільки одне дійсне число z, то кажуть, що *на множині D визначена функція n змінних* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та записують

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Множину D називають областю визначення функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Очевидно, поняття графіка функції для функцій трьох і більшого числа змінних немає змісту.

Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називають *геометричне місце точок* (x, y) *площини*, в яких функція приймає одне й теж саме значення C (рис.8.3).

Рівняння ліній рівня: $f(x, y) = C$.

Число A називають *границею функції* $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) якщо для будь-якого додатнього числа ε існує додатнє число $\delta(\varepsilon)$, таке що для будь-якої точки (x, y) такої, що $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta(\varepsilon)$ і $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, виконується нерівність: $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Позначення: $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$.

Функцію $z = f(x, y)$ називають *неперервною в точці* (x_0, y_0) якщо $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Для функцій трьох і більшого числа змінних також аналогічно вводяться поняття границі функції в точці та неперервності функції в точці.

Властивості, які мали місце для неперервних функцій однієї змінної в точці, справедливі також для функцій декількох змінних.

1. 2. Частинні похідні

В випадку коли існують границі

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

то їх називають *частинними похідними функції* $z = f(x, y)$ відповідно по змінних x та y в точці (x_0, y_0).

Частинні похідні функції $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) також можна позначити в вигляді $f_x'(x_0, y_0)$, $f_y'(x_0, y_0)$.

Аналогічно вводиться поняття частинних похідних для функцій трьох і більшого числа змінних.

При знаходженні частинних похідних на змінну, по якій знаходиться частинна похідна, потрібно дивитися як на змінну, а на решту змінних – як на сталі величини.

Приклад 2*.* Знайти частинні похідні функції $z = \sin xy \cdot \cos y$ та обчислити їх значення в точці $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y (\sin xy)_x' = \cos y \cdot \cos xy \cdot (xy)_x' = y \cdot \cos y \cdot \cos xy$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{12};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\sin xy)_y' \cos y + (\cos y)_y' \cdot \sin xy = \cos xy \cdot (xy)_y' \cdot \cos y - \sin y \cdot \sin xy =$$

$$= x \cdot \cos y \cdot \cos xy - \sin y \cdot \sin xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{2} = \frac{\pi\sqrt{3} - 4}{8}.$$

Приклад 3. Довести, що задана функція $z = arctg\frac{x+y}{x-y}$ задовольняє диференціальному рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 1$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні заданої функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x=\frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{1\cdot(x-y)-1\cdot(x+y)}{(x-y)^2}=$$

$$=\frac{(x-y)^2\cdot(-2y)}{\left(2x^2+2y^2\right)\cdot(x-y)^2}=-\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y=\frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{1\cdot(x-y)+1\cdot(x+y)}{(x-y)^2}=$$

$$=\frac{(x-y)^2\cdot 2x}{\left(2x^2+2y^2\right)\cdot(x-y)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Підставимо отримані вирази частинних похідних в ліву частину рівняння

$$x\frac{x}{x^2+y^2}+y\frac{y}{x^2+y^2}=1;\ \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1.$$

Отримали рівність $1=1$.

1. 3. *Диференційованість функції двох змінних. Диференціал*

Повним приростом функції $z=f(x,y)$ в точці (x_0,y_0), що відповідає приростам Δx і Δy змінних x та y, називають величину:

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

Функцію $z=f(x,y)$ називають *диференційовною в точці* (x_0,y_0) якщо повний приріст функції в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta f(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)\cdot\Delta x+B(x_0,y_0)\cdot\Delta y+\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y,$$

причому $A(x_0,y_0)$, $B(x_0,y_0)$ не залежать від Δx та Δy і $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=0$.

Теорема (достатня умова диференційовності). Якщо функція $z=f(x,y)$ має частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ в околі точки (x_0,y_0), які неперервні в точці (x_0,y_0), то функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці (x_0,y_0).

В випадку, коли функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці (x_0,y_0), то $A(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $B(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Лінійну відносно Δx та Δy частину повного приросту диференційовної в точці (x_0, y_0) функції $f(x, y)$ називають *повним диференціалом функції в цій точці* та позначають $df(x_0, y_0)$.

Таким чином,

$df(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy$, де $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Приклад 4. Знайти повний диференціал функції $z = 2x^4 y^2 + \cos\left(x^2 + 2\sqrt{y}\right)$.

Розв'язання. Повний диференціал знаходиться за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$

Знайдемо частинні похідні заданої функції.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2x^4 y^2\right)_x' + \left(\cos\left(x^2 + 2\sqrt{y}\right)\right)_x' = 8x^3 y^2 - \sin\left(x^2 + 2\sqrt{y}\right) \cdot \left(x^2 + 2\sqrt{y}\right)_x' =$$

$$= 8x^3 y^2 - 2x\sin\left(x^2 + 2\sqrt{y}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2x^4 y^2\right)_y' + \left(\cos\left(x^2 + 2\sqrt{y}\right)\right)_y' = 4x^4 y - \sin\left(x^2 + 2\sqrt{y}\right) \cdot \left(x^2 + 2\sqrt{y}\right)_y' =$$

$$= 4x^4 y - \frac{1}{\sqrt{y}}\sin\left(x^2 + 2\sqrt{y}\right).$$

Отже, повний диференціал даної функції матиме вигляд

$$dz = \left(8x^3 y^2 - 2x\sin\left(x^2 + 2\sqrt{y}\right)\right) \cdot dx + \left(4x^4 y - \frac{1}{\sqrt{y}}\sin\left(x^2 + 2\sqrt{y}\right)\right) \cdot dy.$$

Має місце наближена рівність $\Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0)$. Тому

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Вказаною формулою користуються при наближених обчисленнях.

Приклад 5. Обчислити наближено $\sqrt{(1{,}02)^2 + (1{,}97)^3}$.

Розв'язання. Скористаємось формулою для наближених обчислень

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

В нашому випадку $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \sqrt{(1{,}02)^2 + (1{,}97)^3}$, тобто $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^3}$ $x_0 = 1,\ \Delta x = 0{,}02; \quad y_0 = 2,\ \Delta y = -0{,}03.$

При цьому $f(x_0; y_0) = f(1;2) = \sqrt{1^2 + 2^3} = 3$. Знаходимо частинні похідні функції $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^3}$: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + y^3}} \cdot 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + y^3}} \cdot 3y^2$.

Обчислюємо їхні значення в точці $(1;2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(1;2)=\frac{1}{2\sqrt{1^2+2^3}}\cdot 2=\frac{1}{3}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(1;2)=\frac{1}{2\sqrt{1^2+2^3}}\cdot 3\cdot 2^2=2.$$

Підставляємо знайдені значення у формулу

$$\sqrt{(1{,}02)^2+(1{,}97)^3}\approx 3+\frac{1}{3}\cdot 0{,}02+2\cdot(-0{,}03)=2{,}94+\frac{1}{150}=2\frac{71}{75}.$$

1.*4. Частинні похідні вищих порядків*

Нехай функція $z=f(x,y)$ має в деякій множині D частинні похідні. Частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ є також функціями двох змінних. Якщо, наприклад, функція $\frac{\partial f}{\partial x}$ має частинну похідну по змінній x, то її називають частинною похідною другого порядку і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ або f''_{xx}.

Тобто, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}$.

Зауваження. Потрібно читати: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ – ∂ два f по ∂x в квадраті, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ – ∂ два f по ∂y, ∂x.

Аналогічно вводяться та позначаються частинні похідні третього та вищих порядків.

Якщо функція $z=f(x,y)$ має частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ в деякому околі точки (x_0,y_0), які неперервні в самій точці (x_0,y_0), то $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$.

Приклад 6. Знайти частинні похідні другого порядку для функції

$$z=x^6\cdot y^7.$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку, а саме:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^6\cdot y^7\right)'_x=6x^5\cdot y^7;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^6\cdot y^7\right)'_y=7x^6\cdot y^6.$$

Пам'ятаючи, що $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}$ знайдемо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(6x^5\cdot y^7\right)'_x=30x^4\cdot y^7,$$

аналогічно

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(7x^6 \cdot y^6\right)_y' = 42x^6 \cdot y^5 .$$

Обчислимо змішані похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(7x^6 \cdot y^6\right)_x' = 42x^5 \cdot y^6 ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(6x^5 \cdot y^7\right)_y' = 42x^5 \cdot y^6 .$$

Запитання для самоперевірки

1. Дати означення функції двох змінних.
2. Що називають графіком функції двох змінних?
3. Сформулювати означення лінії рівня функції двох змінних.
4. Що називають границею функції двох змінних в точці $(x_0;y_0)$?
5. Дати означення функції неперервної в точці $(x_0;y_0)$?
6. Які властивості мають неперервні функції?
7. Що називають частинною похідною функції ?
8. Що розуміють під повним приростом функції двох змінних?
9. Яку функцію називають диференційовною в точці $(x_0;y_0)$?
10. Що називають диференціалом функції двох змінних?
11. Сформулювати теорему про похідну складеної функції.
12. Як знайти частинні похідні другого порядку функції двох змінних?
13. Яка властивість змішаних похідних другого порядку функції двох змінних?

Навчальні завдання

67. Знайти і зобразити область визначення функції:

а) $z = x^2 + y^2$; *б)* $z = \dfrac{5}{x^2 + y^2}$; *в)* $z = \dfrac{9}{x - y}$; *г)* $z = \sqrt{xy}$;

д) $z = \dfrac{-2}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$; *е)* $z = \sqrt{-2xy}$; *є)* $z = \ln(x + y)$; *ж)* $z = \arcsin\dfrac{x}{2} + \arcsin\dfrac{y}{3}$.

68. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = x^3 + 3x^2 y - y^2$; *б)* $z = \ln(x^2 + y^2)$; *в)* $z = e^x \cos y$; *г)* $z = \sqrt{x^2 - y^2}$;

д) $z = y^x$; *е)* $z = 5^{\frac{y}{x}}$; *є)* $z = \sin(x^3 + y^2)$; *ж)* $u = xy^2 z^3$;

з) $u = xy + yz + zx$; *к)* $u = x^2 e^y \ln z$.

69. Довести, що задана функція *z=f(x;y)* задовольняє вказане рівняння:

а) $z = \ln(e^x + e^y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$; *б)* $z = x^3 + xy^2 - 2y^3$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3z$;

в) $z=\sqrt{x^2+xy+y^2}$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$;   г) $z=e^{\frac{x}{y^2}}$, $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$;

д) $z=\dfrac{x^3}{x-y}$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

70. Знайти повний диференціал функції:

а) $z=x^2y^3$;   б) $z=\sqrt{x^2-y^2}$;   в) $z=\cos(xy)$;

г) $u=\ln(x^3-y^3+2z^3)$;   д) $u=\dfrac{y}{xz}$;   е) $u=x^2yz^4$.

71. Знайти частинні похідні другого порядку для функцій:

а) $z=x^3+3x^2y-y^2$;   б) $z=\ln(x^2+y^2)$;   в) $z=e^{x+y^2}$;   г) $z=3x^y$;

д) $z=\sin(x^2-2y^3)$;   е) $z=\ln(x^2-\sin y)$;   є) $z=2^y+2x^2$;   ж) $z=x^2-y^2$;

з) $z=e^{xy}$;   к) $z=\ln(x^2+y)$.

Завдання для самостійної роботи

72. Знайти і зобразити область визначення функції:

а) $z=\ln x+\ln y$;   б) $z=\dfrac{4}{x^2-y^2}$.

73. Обчислити частинні похідні даної функції в указаній точці:

а) $z=x^2\sin^2 y$, $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$;   б) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $(3;4)$.

74. Знайти частинні похідні другого порядку для функцій:

а) $z=\ln x+\ln y$;   б) $z=\dfrac{4}{x^2-y^2}$.

§ 2. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

2.1. Похідні та частинні похідні складених функцій

Якщо функція $x=x(t)$, $y=y(t)$ диференційовні в точці t_0, а функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці (x_0,y_0), причому $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, то функція $f(x(t),y(t))$ диференційовна в точці t_0, причому

$$\frac{df}{dt}(x(t_0),y(t_0))=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\frac{dx}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\frac{dy}{dt}(t_0).$$

Якщо конкретно не вказувати точку, то можна записати

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці (x_0, y_0), а функції $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ мають частинні похідні по змінних u і v в точці (u_0, v_0), причому $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, то в точці (u_0, v_0) існують частинні похідні функції $f(x(u, v), y(u, v))$, причому в цій точці

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \tag{2}$$

Приклад 1. Дано $z = 3x^3 - xy^2$, де $x = 5 + t^2$, $y = 2t^3$. Знайти $\frac{dz}{dt}$.

Розв'язання. Можна, звичайно, записати

$$z = 3(5 + t^2)^3 - (5 + t^2)(2t^3)^2$$

і знайти похідну цієї функції, але при складніших зв'язках між змінними доцільніше скористатись формулою (1). Для цього знайдемо спочатку частинні похідні функції $z = z(x, y)$ та похідні функцій $x = x(t)$ і $y = y(t)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 9x^2 - y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy, \qquad \frac{dx}{dt} = 2t, \qquad \frac{dy}{dt} = 6t^2.$$

Підставимо знайдені результати у формулу (1)

$$\frac{dz}{dt} = (9x^2 - y^2) \cdot 2t - 2xy \cdot 6t^2 = 18(5 + t^2)^2 t - 2 \cdot (2t^3)^2 t - 2(5 + t^2) \cdot 2t^3 \cdot 6t^2 =$$

$$= 450t + 180t^2 + t^5 - 8t^7 - 120t^5 - 24t^7 = -32t^7 - 119t^5 + 180t^2 + 450t.$$

2.2. Похідна в заданому напрямі. Градієнт функції

Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$. Візьмемо точку $M_0(x_0, y_0)$, яка належить області визначення функції, та промінь λ, початком якого є точка $M_0(x_0, y_0)$. Допустимо, що промінь λ утворює з віссю Ox кут α. На промені λ візьмемо довільну точку $M\ (x.;y)$ (рис. 8.2).

Введемо позначення $|M_0M| = p$. Тоді $\Delta x = x - x_0 = p\cos\alpha$, $\Delta y = y - y_0 = p\sin\alpha$.

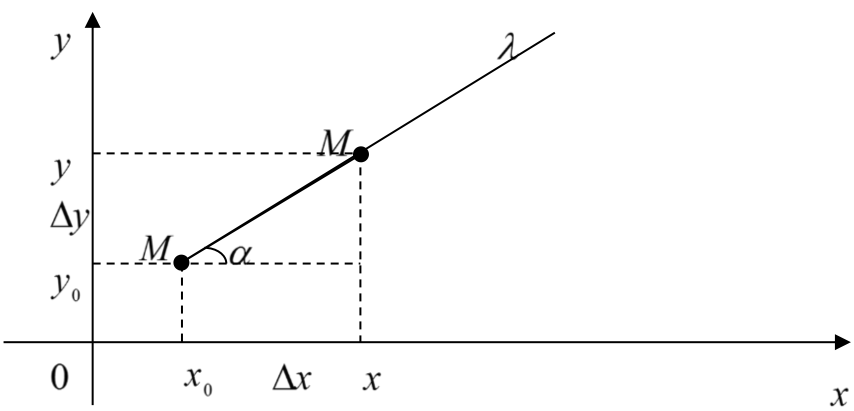


Рис. 8.4.

Якщо існує границя відношення $\frac{f(x_0 + p\cos\alpha,\, y_0 + p\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{p}$ при $p \to 0$, то таку границю називають *похідною функції* $f(x,\, y)$ *в точці* $(x_0,\, y_0)$ *за напрямом* λ і позначають $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_0,\, y_0)$.

Тобто, за означенням

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_0,\, y_0) = \lim_{p \to 0} \frac{f(x_0 + p\cos\alpha,\, y_0 + p\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{p}.$$

Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $P_0(x_0; y_0)$ неперервні частинні похідні, тоді в цій точці існує похідна $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ за будь-яким напрямом $\vec{l}(\cos\alpha; \cos\beta)$, причому

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta,$$

де $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}$ – значення частинних похідних у точці $P_0(x_0; y_0)$.

Заваження. Якщо вектор $\overline{n}(l; m)$ одиничний і має однаковий напрям що і промінь λ, то отримаємо

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_0,\, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0) \cdot l + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0) \cdot m.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $z = x^3 + y^3$ в точці $(2; 3)$ за напрямом $\vec{p} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Розв'язання. Знайдемо та обчислимо частинні похідні функції $z = x^3 + y^3$ в точці $(2; 3)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^3 + y^3\right)'_x = 3x^2; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^3 + y^3\right)'_y = 3y^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2; 3) = 3 \cdot 2^2 = 12; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(2; 3) = 3 \cdot 3^2 = 27.$$

Тепер обчислимо координати одиничного вектора $\vec{n}$, співнаправленого з вектором $\vec{p}$, для цього вектор $\vec{p}$ поділимо на його довжину.

$$\vec{p} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \qquad |\vec{p}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\bar{n}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}};\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right);$$

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial p}(2,3)=12\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+27\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{10}+27\sqrt{15}}{5}.$$

Вектор $\bar{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0);\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ називають *градієнтом функції* $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0). Він вказує напрям, в якому швидкість зростання функції є найбільшою.

Позначають $\overrightarrow{grad}\, f$.

Отже,

$$\overrightarrow{grad}\; f=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)\vec{j} \tag{3}$$

Якщо функція $u=u(x;y;z)$ залежить від трьох змінних, то її градієнт визначають за формулою

$$\overrightarrow{grad}\; u=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}\vec{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}\vec{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\vec{k}. \tag{4}$$

Приклад 3. Обчислити градієнт функції $z=\ln(x+y)+3x^4-y$ у точці $P_0(1;3)$.

Розв'язання. Для обчислення градієнта функції, яка залежить від двох змінних скористаємось формулою (3). Для цього потрібно обчислити спочатку частинні похідні функції $z=\ln(x+y)+3x^4-y$ у точці $P_0(1;3)$.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;3)}=\left.\left(\frac{1}{x+y}+12x^3\right)\right|_{(1;3)}=\frac{1}{4}+12=12{,}25,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;3)}=\left.\left(\frac{1}{x+y}-1\right)\right|_{(1;3)}=\frac{1}{4}-1=-0{,}75.$$

Отже $\overrightarrow{grad}\; z=12{,}25\vec{i}-0{,}75\vec{j}$.

2.3. Дотична площина і нормаль до поверхні

Дотичною площиною до поверхні у точці P_0 називається площина, яка містить дотичні до всіх кривих, які проведені на поверхні через точку P_0 .

Нехай поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$. Допустимо, що функція $f(x, y)$ диференційовна в точці (x_0, y_0). Тоді до поверхні в точці $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ можна провести дотичну площину, яка задається рівнянням:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) + (-1)\cdot(z - f(x_0, y_0)) = 0. \qquad (5)$$

Нормаллю до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ називають пряму, яка проходить через вказану точку і перпендикулярна до дотичної площини, проведеної до поверхні в цій точці.

Рівняння нормалі до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ має такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}. \qquad (6)$$

Якщо, наприклад, нулю дорівнює $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}$, то це означає, що дотична площина паралельна осі *Ox*, а нормаль лежить у площині $x = x_0$.

Приклад 4. Дана площина $z = x^3 + 5xy^2 + 2y - 5$. Скласти рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до цієї поверхні у точці $P_0(1;1;1)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні даної функції

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 5y^2 \qquad \text{і} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 10xy + 2$$

та їх значення у вказані точці

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;1;1)} = 8, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;1;1)} = 12.$$

Використовуючи формулу (5) записуємо рівняння дотичної площини

$$z - 1 = 8(x - 1) + 12(y - 1), \text{ або } 8x + 12y - z - 19 = 0.$$

Рівняння нормалі :

$$\frac{x - 1}{8} = \frac{y - 1}{12} = \frac{z - 1}{-1}.$$

2.4. Екстремуми функцій двох змінних.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена на множині D і точка (x_0, y_0) належить цій множині.

Якщо існує окіл точки (x_0, y_0), який належить множині D, такий що для всіх точок (x, y) з цього околу, крім $(x, y) = (x_0, y_0)$, виконується нерівність $f(x, y) < f(x_0, y_0)$

$\left(f(x, y) > f(x_0, y_0) \right)$, то точку (x_0, y_0) називають *точкою максимуму (мінімуму)* функції $f(x, y)$, а значення функції $f(x_0, y_0)$ *максимумом (мінімумом)* функції.

Точки максимуму та мінімуму функції називають точками *екстремуму*, а значення функції в цих точках *екстремумуми* функції.

Теорема (необхідна умова існування точок екстремуму). Якщо диференційовна функція $z = f(x, y)$ має в точці (x_0, y_0) екстремум, то

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Точки, в яких частинні похідні функції $z = f(x, y)$дорівнюють нулю, називають *стаціонарними*.

Якщо в точці частинні похідні функції дорівнюють нулю, тобто, точка є стаціонарною для функції, то це ще не означає що дана точка є точкою екстремуму.

Теорема (достатня умова існування точок екстремуму). Нехай функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно в деякому околі точки (x_0, y_0), яка є стаціонарною точкою цієї функції. Якщо величина $\Delta(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2$ додатня, то функція $z = f(x, y)$ має екстремум в точці (x_0, y_0), причому максимум, якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, та мінімум, якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$.

Якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то в цій точці функція немає екстремуму.

Зауваження. Якщо точка (x_0, y_0) стаціонарна для функції $z = f(x, y)$ і $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то дана точка може бути або не бути точкою екстремуму.

Алгоритм дослідження функції на екстремум:

1. Знайти стаціонарні точки функції, тобто точки, в яких $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
2. Знайти частинні похідні другого порядку і записати визначник

$$\Delta = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0;y_0)} \cdot \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0;y_0)} - \left(\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0;y_0)} \right)^2.$$

3. Обчислити значення визначника у стаціонарних точках і, використовуючи достатню умову екстремуму виявити точки екстремуму.
4. Застосовуючи теорему вияснити, які з критичних точок являються точками мінімуму, а які максимуму.
5. Обчислити екстремум, якщо він існує.

Приклад 5. Дослідити на екстремуми функцію $z = x^3 + y^3 - 12xy$.

Розв'язання. 1. Щоб виявити стаціонарні точки, знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 12y$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 12x$, та розв'яжемо систему

$$\begin{cases} 3x^2 - 12y = 0, \\ 3y^2 - 12x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4y, \\ \dfrac{x^4}{16} - 4x = 0; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ y = 4. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отже ми знайшли дві стаціонарні точки $M(0;0)$ та $N(4;4)$.

2. Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y \ \text{ і } \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12$$

та запишемо визначник $\Delta = 6x \cdot 6y - (-12)^2 = 36xy - 144$.

3. Обчислимо значення визначника у кожній точці. $\Delta(0;0) = -144 < 0$, отже точка $M(0;0)$ не являється точкою екстремуму. Перевіримо точку $N(4;4)$ $\Delta(4;4) = 36 \cdot 16 - 144 = 432 > 0$, тобто точка $N(4;4)$ є точкою екстремуму.

4. Щоб вияснити, що це за екстремум, обчислимо значення частинної похідної другого порядку у точці $N(4;4)$ $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(4;4)} = 6 \cdot 4 > 0$.

Отже, це точка мінімуму.

5. $z_{\min} = z(4;4) = 4^3 + 4^3 - 12 \cdot 4 \cdot 4 = -64$.

2.5. Найбільше і найменше значення функції на замкнутій обмеженій області

Функція неперервна на замкнутій обмеженій області $\overline{D}$, досягає на цій множині свого найбільшого та найменшого значення. Цих значень вона може набувати як у внутрішніх точках області $\overline{D}$ (це обов’язково стаціонарні точки), так і на її межі.

Для відшукання *найбільшого і найменшого значення функції* на замкнутій обмеженій області $\overline{D}$ потрібно:

1. Знайти критичні точки, які лежать всередині області та обчислити значення функції в цих точках.
2. Знайти критичні точки, які лежать на межі області та обчислити значення функції в цих точках.
3. Вибрати із одержаних значень найбільше та найменше.

Приклад 6. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкненій області, яка обмежена прямими $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

Розв'язання. Зобразимо вказану область (рис.8.5).

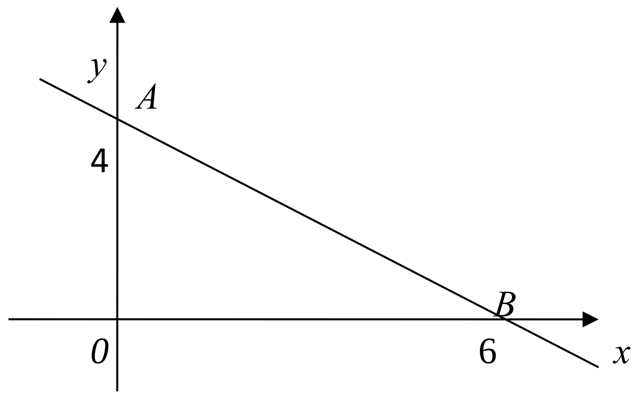


Рис. 8.5.

1. Знайдемо критичні точки функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 4, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y.$$

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ -x + 2y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{3}, \\ y = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Одержана критична точка лежить всередині області.

$$z\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4\cdot\frac{8}{3} = -\frac{48}{9}$$

2. Розглянемо межу OB, тут $y = 0$, отже $z = x^2 - 4x$. Дослідимо цю функцію на найбільше та найменше значення враховуючи, що $0 \le x \le 6$.

$z' = 2x - 4$, $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$– критична точка функції $z = x^2 - 4x$, вона належить інтервалу $[0;6]$. Обчислимо значення цієї функції у знайденій точці та на кінцях інтервалу $[0;6]$: $z(0;0) = 0$, $z(2;0) = -4$, $z(6;0) = 12$.

Розглянемо межу OA, тут $x = 0$, отже $z = y^2$. Дослідимо цю функцію на найбільше та найменше значення враховуючи, що $0 \le y \le 4$.

$z' = 2y$, $2y = 0 \Rightarrow y = 0$– критична точка функції $z = y^2$, вона співпадає з одним із кінців інтервалу $[0;4]$. Обчислимо значення функції у точці $(0;4)$(у точці $(0;0)$ ми уже обчислювали) $z(0;4) = 16$.

Розглянемо межу *AB*, тут $y = -\frac{2}{3}x + 4$, отже

$$z = x^2 - x\left(-\frac{2}{3}x + 4\right) + \left(-\frac{2}{3}x + 4\right)^2 - 4x = x^2 + \frac{2}{3}x^2 - 4x + \frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{3}x + 16 - 4x = \frac{19}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 16$$

Дослідимо цю функцію на найбільше та найменше значення враховуючи, що $0 \le x \le 6$.

$z' = \frac{38}{9}x - \frac{40}{3}$, $\frac{38}{9}x - \frac{40}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{60}{19}$– критична точка функції $z = \frac{19}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 16$, вона належить інтервалу $[0;6]$. Обчислимо значення цієї функції у знайденій точці (на кінцях інтервалу $[0;6]$ значення були обчислені раніше):

$$z\left(\frac{60}{19};-\frac{4}{9}\right)=\frac{19}{9}\cdot\left(\frac{60}{19}\right)^2-\frac{40}{3}\cdot\frac{60}{19}+16=-\frac{4064}{171}=-23\frac{131}{171}.$$

3. Залишилось вибрати найбільше і найменше значення серед одержаних значень.

Отже $z_{найб}=z(0;4)=16$, $z_{найм}=z\left(\frac{60}{19};-\frac{4}{9}\right)=-23\frac{131}{171}$.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулювати теорему про похідну складеної функції декількох змінних.
2. Дати означення похідної за напрямом.
3. Що називають градієнтом функції в точці?
4. Дати означення дотичної площини.
5. Рівняння дотичної площини до поверхні у даній точці.
6. Що називають нормаллю до площини у точці?
7. Записати рівняння нормалі до поверхні.
8. Яку точку називають точкою локального мінімуму (максимуму)?
9. Яку точку називають стаціонарною ?
10. Яка необхідна умова екстремуму функції декількох змінних?
11. Сформулювати достатню умову екстремуму функції декількох змінних.

Навчальні завдання

75. Знайти похідну складеної функції $\frac{dz}{dt}$:

а) $z=e^x+y$, $x=\ln t$, $y=\sin t$; *б*) $z=e^{2x-3y}$, $x=tgt$, $y=-ctg\,t$;

в) $z=x^2+xy+y^2$, $x=\sin t$, $y=\cos t$; *г*) $z=\frac{y}{x}$, $x=e^t$, $y=1-e^{2t}$;

д) $z=x^3-xy$, $x=1-t^2$, $y=t^4$; *е*) $z=x^3+xy^2$, $x=e^t$, $y=\sin t$.

76. Знайти:

а) похідну функції $u=\ln(x+2y)$ в точці $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ за напрямом $\bar{l}=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) похідну функції $z=\frac{x-y^2}{x+y^2}$ в точці $(2;1)$ за напрямом $\bar{l}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

77. Знайти градієнт функції у точці:

а) $z=4-x^2-y^2$, $(1;\,2)$; *б*) $z=\frac{4}{x^2+y^2}$, $(-1;\,2)$; *в*) $z=\frac{\sin xy}{2x}$, $\left(\frac{\pi}{4};1\right)$;

г) $z=arctg\frac{y}{x}$, $(1;\,1)$; *д*) $z=13\ln\left(x^3y^2+1\right)$, $(1;\,-1)$.

78. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в указані точці:

а) $z=3+x^2-y^2$, $(1;\,2;\,0)$; *б*) $z=\left(x^2+xy\right)e^y$, $(-3;\,0)$;

в) $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$, $(3;\,4;\,-7)$; *г*) $z=x\ln(x-y)$, $(2;\,1)$.

79. Дослідити на екстремум функцію:

а) $z=-x^2-4y^2+5x-8y+3$; *б)* $z=x^4+2y^4+3$; *в)* $z=3x^2-y^2+4y+5$;

г) $z=e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2\right)$; *д)* $z=x^2+y^2-8x-2$.

80. Знайти найменше і найбільше значення функції $z=z(x;y)$ на заданій області.

а) $z=3x^2+6xy+y^2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y\leq 6$; *б)* $z=4xy^2-y^2$, $y\leq 0$, $x^2-y\leq 0$;

в) $z=x^2-3xy+y$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y\leq 6$; *г)* $z=xy$, $x^2+y^2\leq 1$.

Завдання для самостійної роботи

81. Знайти градієнт функції у точці $A(0;1)$.

82. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=x^2+y^2$ у точці *M* $(1;\ 2;\ 5)$.

83. Дослідити на екстремум функцію $z=x^3+8y^3-6xy+1$.

84. Знайти найменше і найбільше значення функції $z=x^2-xy+y^2-x-y$ на області $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y\leq 3$.

Глава 9
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННОЇ

§ 1. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Деякі топологічні поняття

ε-околом точки M_0 $(x_0;\ y_0)$ на площині $(M_0 \in E_2)$ називають внутрішність круга деякого радіуса ε, центр якого знаходиться в точці M_0 $(x_0;\ y_0)$ (рис. 9.1).

Тобто

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$$

ε-околом точки M_0 $(x_0;\ y_0,\ z_0)$ $(M_0 \in E_3)$ називають внутрішність кулі деякого радіуса ε, центр якого знаходиться в точці M_0 $(x_0;\ y_0,\ z_0)$ (рис. 9.2).

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2$$

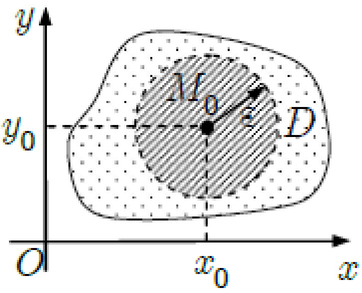


Рис. 9.1

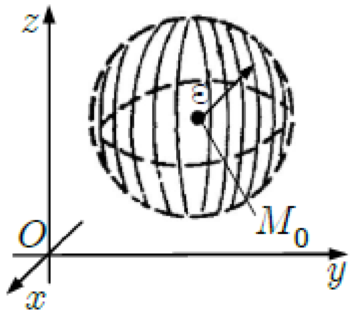


Рис. 9.2

Нехай D деяка множина точок на площині $(D \subset E_2)$.

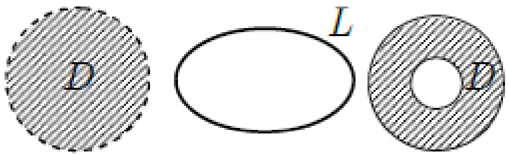
Точку M $(x;\ y)$ називають *внутрішньою точкою* множини D, якщо існує такий окіл точки M, який повністю належить множині D.

Множину D називають *відкритою*, якщо кожна її точка є внутрішньою.

Множину D називають *зв'язною*, якщо будь-які дві точки цієї множини можна сполучити неперервною кривою, яка цілком належить множині D (рис. 9.3).

Відкриту зв'язну множину D називають *областю*.

Точку M називають *граничною точкою* множини D, якщо в кожному околі цієї точки містяться як точки, які належать множині D, так і точки, які їй не належать (рис. 9.4).



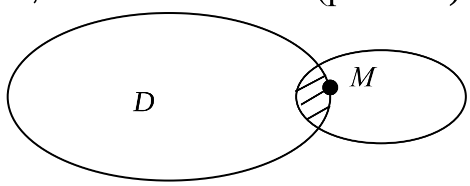


Рис. 9.3 Рис. 9.4

Множину D називають ***замкненою***, якщо всі граничні точки цієї множини належать їй.

Якщо множина D є замкненою, то її позначають у вигляді $\overline{D}$.

Множину D називають *обмеженою*, якщо існує круг скінченного радіуса, який цілком містить множину D.

1.2. *Поняття подвійного інтеграла*

Коли межа області $\overline{D} \subset R_2$ складається із скінченного числа неперервних кривих, кожна з яких визначається рівнянням виду $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$, де $f(x)$ і $\varphi(y)$ — неперервні функції своїх аргументів на деяких відрізках простору R_2, то така область *квадрована*. Це саме стосується й області $\overline{G} \subset R_3$.

Діаметром замкненої області $\overline{D}$ називають найбільшу відстань між двома точками межі цієї області .

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в замкненій обмеженій квадровній (має площу) області $\overline{D}$.

Розіб'ємо $\overline{D}$ сіткою кусково-гладких кривих на n довільних частин $\overline{D}_k$ $\left(k = \overline{0, n-1}\right)$ попарно без спільних внутрішніх точок, так що $\overline{D} = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} \overline{D}_k$.

Таке розбиття називають T – розбиттям.

Введемо позначення: ΔS_k – площа $\overline{D}_k$, $d_k = diam\,\overline{D}_k$, $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} d_k$.

На кожній множині $\overline{D}_k$ виберемо довільно по одній точці $P_k(x_k, y_k)$.

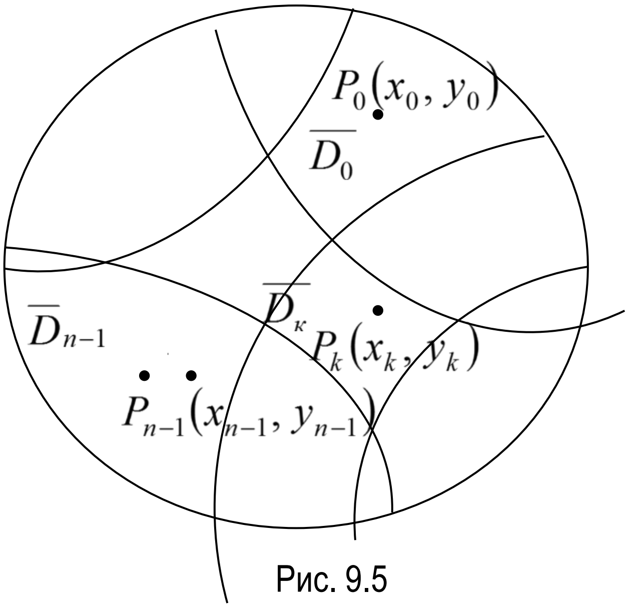


Рис. 9.5

Розглянемо суму

$$\sigma(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k ,$$

яку називають *подвійною інтегральною сумою* для функції $z = f(x, y)$ на $\overline{D}$.

Очевидно, інтегральна сума залежить як від розбиття T, так і від вибору точок $P_k(x_k, y_k)$.

Число I називають *границею інтегральних сум* $\sigma(T)$ при $\lambda(T) \to 0$, якщо для будь-якого додатнього числа ε існує додатнє число $\delta(\varepsilon)$, таке що при умові $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$, незалежно ні від розбиття, ні від вибору точок, виконується нерівність

$$|\sigma(T) - I| < \varepsilon.$$

Якщо при $\lambda(T) \to 0$ інтегральні суми $\sigma(T)$ мають границю, яка дорівнює числу I, то це число називають *подвійним інтегралом* від функції $f(x, y)$ на множені $\overline{D}$ і позначають

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x, y)\, dx\, dy \quad \left(\iint\limits_{\overline{D}} f(x, y)\, dS \right).$$

Таким чином, за означенням

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k.$$

У цьому випадку функцію *f(x, y)* називають *інтегрованою* в області $\overline{D}$; область $\overline{D}$ – *областю інтегрування*; *x, y* – *змінними інтегрування*; *dS* (або *dxdy*)– *елементом площі.*

1.3. Умови існування подвійного інтеграла

Нехай функція *z = f(x, y),* обмежена в області $\overline{D}$. Якщо функція *f(x, y),* неперервна в області $\overline{D}$ то m_k і $M_к$ є відповідно її найменше та найбільше значення в області $\overline{D}_k$. Оскільки

$$m_k \le f(x_k; y_k) \le M_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad n-1,$$

то

$$\underline{S} \le \sigma \le \overline{S},$$

де $\underline{S} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta s$ – нижня сума Дарбу, $\overline{S} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta s$ – верхня сума Дарбу.

Теорема 1 (критерій інтегрованості функції). Для того щоб обмежена в області $\overline{D}$ функція *z = f(x, y),* була інтегрованою в цій області, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \left(\underline{S} - \overline{S} \right) = 0.$$

Теорема 2 (достатня умова інтегрованості функції). Кожна функція *z = f(x, y),* неперервна в замкненій обмеженій квадровній області $\overline{D}$, інтегрована в цій області**.**

1.4. Властивості подвійних інтегралів

1°. Якщо $z = f(x, y) = C$, C – const, то

$$\iint_{\overline{D}} C dx dy = CS,$$

де S – площа області $\overline{D}$. У випадку якщо C = 1, то

$$\iint_{\overline{D}} C dx dy = S.$$

2°. Якщо функції $f(x, y)$, та $\varphi(x, y)$, інтегровані в області $\overline{D}$, то в цій області інтегровані також і функції $f(x, y) \pm \varphi(x, y)$ і справджується рівність

$$\iint_{\overline{D}} \left(f(x;y) \pm \varphi(x;y) \right) dx dy = \iint_{\overline{D}} f(x;y) dx dy \pm \iint_{\overline{D}} \varphi(x;y) dx dy.$$

3°. Якщо функція $f(x, y)$ інтегрована в області $\overline{D}$, то в цій області інтегрована й функція $C f(x, y)$, де C – *const*, причому

$$\iint_{\overline{D}} C f(x;y) dx dy = C \iint_{\overline{D}} f(x;y) dx dy.$$

4°. (*Адитивність подвійного інтегралу*) Якщо функція $f(x, y)$ інтегрована в кожній з областей $\overline{D_1}$ і $\overline{D_2}$, які не мають спільних внутрішніх точок, то вона інтегрована також в області $\overline{D} = \overline{D_1} \cup \overline{D_2}$, причому

$$\iint_{\overline{D}} f(x;y) dx dy = \iint_{\overline{D_1}} f(x;y) dx dy + \iint_{\overline{D_2}} f(x;y) dx dy.$$

5°. Якщо $f(x;y) \geq 0$, де $(x;y) \in \overline{D}$ і функція $f(x, y)$ інтегрована в області $\overline{D}$, то

$$\iint_{\overline{D}} f(x;y) dx dy \geq 0.$$

6°. Якщо $f(x;y) \geq \varphi(x;y)$, де $(x;y) \in \overline{D}$ і кожна з функцій $f(x,y)$ та $\varphi(x,y)$ інтегрована в області $\overline{D}$, то

$$\iint_{\overline{D}} f(x;y) dx dy \geq \iint_{\overline{D}} \varphi(x;y) dx dy.$$

7°. (*Середнє значення функції*). Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій області $\overline{D}$, яка має площу S, то існує така точка $(x_0, y_0) \in \overline{D}$, що

$$\iint_{\overline{D}} f(x;y) dx dy = f(x_0, y_0) S.$$

Величину

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{S} \iint\limits_{\overline{D}} f(x, y) dx dy$$

називають *середнім значенням* функції в області $\overline{D}$.

8 °. (*Оцінка подвійного інтегралу)* Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій області $\overline{D}$, яка має площу S, то

$$mS \le \iint\limits_{D} f(x, y) dx dy \le MS,$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області $\overline{D}$.

1.5. Обчислення подвійних інтегралів

1. *Випадок довільної області інтегрування.* Означення подвійного інтеграла одночасно дає і спосіб його обчислення. Однак цей спосіб досить складний, тому розглянемо інший, який зводиться до обчислення так званого *повторного інтеграла* – двох визначених інтегралів.

Область $\overline{D}$ називається *правильною* щодо деякої осі координат, якщо будь-яка пряма, паралельна цій осі, перетинає межу області не більш ніж у двох точках

Якщо область $\overline{D}$ правильна щодо осі Oy то пряма, паралельна до осі Oy перетинає криві $\varphi_1(x)$, та $\varphi_2(x)$ в точках M_1, M_2, які називатимемо відповідно *точкою входу* в область $\overline{D}$ *точкою виходу* з області $\overline{D}$. Ординати цих точок рівні $y_{вх} = \varphi_1(x)$, $y_{вих} = \varphi_2(x)$ (рис. 9.6).

Наприклад, область $\overline{D}$ – правильна щодо осі Oy та неправильна щодо осі Ox (рис. 9.8). Звичайно, неправильну область можна розкласти на такі частини, кожна з яких буде правильною щодо певної осі, наприклад, області $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$, $\overline{D}_3$ правильні відносно осей Ox та Oy $\overline{D_0} = \overline{D_1} \cup \overline{D_2} \cup \overline{D_3}$.

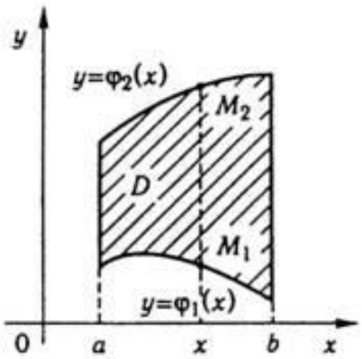


Рис. 9.6

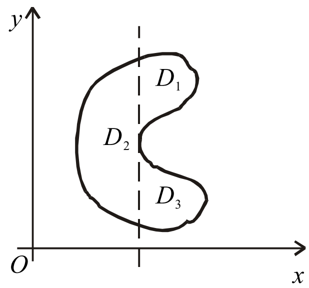


Рис. 9.7

Розглянемо в системі $Oxyz$ тіло з циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz; основою тіла є область $\overline{D}$, що міститься на площині Oxy, а зверху тіло обмежене поверхнею $z = f(x;y) \geq 0$ (рис. 9.8). Таке тіло називають *циліндричним.*

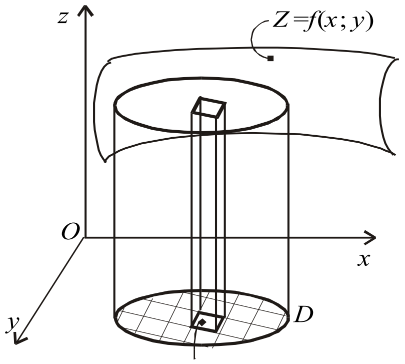


Рис. 9.8

Об'єм циліндричного тіла можна знайти у вигляді такої границі:

$$V = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot \Delta S_i ,$$

де $\lambda(T)$ – максимальний діаметр частинки S_i.

Отже

$V = \iint\limits_{D} f(x;y)dxdy -$ геометричний зміст подвійного інтеграла

Нехай в основі циліндричного тіла лежить криволінійна трапеція $\overline{D}$. Розглянемо $\overline{D} = \{(x;\ y) \in R^2 \,|\, a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, яка буде правильною відносно осі Oy (рис. 9.6). При фіксованому $x = x_0$ функція $z = f(x;y)$ є функцією лише y, причому y змінюється в межах від $y_{вх} = \varphi_1(x)$ до $y_{вих} = \varphi_2(x)$

$$S(x_0) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x_0;y)dy ,$$

тоді об'єм циліндричного тіла запишеться так:

$$V = \iint\limits_{D} f(x,y)dS = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} S(x)dx = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;\ y)dy$$

Отже, щоб обчислити подвійний інтеграл у випадку довільної області інтегрування, правильної щодо осі Oy, потрібно використати формулу

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;\ y)dy}$$

А у випадку коли область $\overline{D}$ – правильна щодо осі Oy (рис. 9.9)

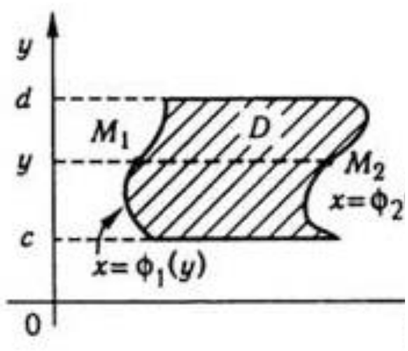


Рис. 9.9

Тобто $\overline{D} = \{(x;\ y) \in R^2 \,|\, a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$

Маємо

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x;\ y)dx}$$

Зауваження. Зовнішні межі це мінімальне і максимальне значення зовнішньої змінної в області $\overline{D}$. Внутрішні межі – значення внутрішньої змінної на лінії входу в область $\overline{D}$ і лінії виходу з неї.

Зауваження. Щоб поміняти порядок інтегрування у випадку довільної області $\overline{D}$, треба за межами інтегрування відновити (аналітично та геометрично) область $\overline{D}$ і розв'язати задачу зведення подвійного інтеграла до повторного спочатку (змінюючи порядок інтегрування).

2. Випадок прямокутної області інтегрування. Розглянемо найпростіший випадок, коли в основі циліндричного тіла лежить прямокутник

$$\overline{D}=\{(x;\ y):\ a\le x\le b,\ c\le y\le d\ \}$$

Враховуючи геометричний зміст подвійного інтеграла, матимемо

$$\boxed{\iint\limits_{\overline{D}} f(x;\ y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;\ y)dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^s f(x,y)dy.}$$

У даному повторному інтегралі інтегрування виконується спочатку по змінній y, а потім по змінній x. Інтеграл по змінній y називають *внутрішнім*, а інтеграл по змінній x – *зовнішнім*.

Зауваження. Для прямокутної області інтегрування порядок інтегрування можна міняти місцями, тобто

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;\ y)dy\right)dx=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x;\ y)dx\right)dy.=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Приклад 1*.* Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{\overline{D}}(x^2+xy-y^2)dxdy$, область

$\overline{D}$ = $\{(x;\ y):\ 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$.

Розв'язання.

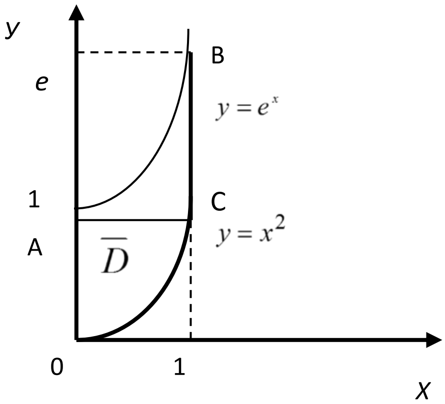
$$\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^1(x^2+xy-y^2)dy=\int\limits_1^2\left[\left(x^2y+\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}\right]dx=\int\limits_1^2\left(x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{11}{4}.$$

Приклад 2. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{e^x} f(x,y)dy$.

Розв'язання. Перш за все слід побудувати область інтегрування $\overline{D}$ (рис. 9.10). Область $\overline{D}$ визначається нерівностями $0\le x\le 1$ та $x^2\le y\le e^x$.

Будуємо криві $y=x^2$, $y=e^x$ та пряму $x=1$.



Якщо ми хочемо змінити порядок інтегрування і внутрішній інтеграл обчислити по змінній x, а зовнішній інтеграл - по y, то область інтегрування треба розбити на дві: OAC та ABC. Це пояснюється тим, що права частина контуру OCB, що обмежує

Рис. 9.10

область $\overline{D}$, складається з двох ліній ОС та СВ, які визначаються різними рівняннями: (ОС) $y = x^2$, (АВ) $y = e^x$ (рівняння ліній в цьому випадку повинні бути розв‘язані відносно змінної *x*: $x = \sqrt{y}$, $x = \ln y$).

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x,y)dx$$

Приклад 3. Обчислити $\iint\limits_D \left(x^2 + y\right)dxdy$, де $D = \left\{(x;\ y) \in R^2 \middle| -1 \le x \le 2,\quad x^2 \le y \le x + 2\right\}$.

Розв'язання.

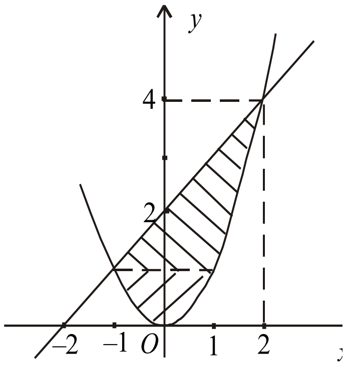


Рис. 9.11

Область $\overline{D}$ правильна щодо осі *Oy* (рис. 9.11), тому:

$$\iint\limits_D \left(x^2 + y\right)dxdy = \int_{-1}^{2} \left(\int_{x^2}^{x+2} \left(x^2 + y\right)dy \right)dx = \int_{-1}^{2} \left(\left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y = x^2}^{y = x + 2} \right)dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(x^2(x+2) + \frac{1}{2}(x+2)^2 - \left(x^2 \cdot x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2\right)^2 \right) \right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(-\frac{3}{2}x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + 4 \right)dx =$$

$$\left(-\frac{3}{10}x^5 + \frac{x^4}{4} + \frac{5}{6}x^3 + x^2 + 2x \right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

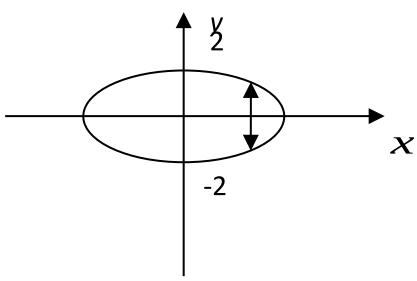
$$= -0{,}3 \cdot 32 + 4 + \frac{20}{3} + 4 + 4 - \left(0{,}3 + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + 1 - 2 \right) = 10{,}35.$$

Ця сама область $\overline{D}$ (рис. 9.11) неправильна щодо осі Ox, тому якщо змінити порядок інтегрування, то розглядуваний інтеграл можна звести до таких повторних інтегралів:

$$\iint\limits_D \left(x^2 + y\right)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \left(x^2 + y\right)dx \right)dy + \int_1^4 \left(\int_{y-2}^{\sqrt{y}} \left(x^2 + y\right)dx \right)dy.$$

Приклад 4. Перейти від подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ до повторного, де область $\overline{D}$ – область обмежена лініями: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \le 1$.

Розв'язання. Зобразимо область інтегрування, яка є еліпсом з великою піввіссю $a = 4$ та малою $b = 2$ (рис.9.12).



Виберемо порядок інтегрування спочатку по змінній y, а потім по змінній x. Для того, щоб встановити межі інтегрування проведемо стрілку, яка паралельна осі Oy.

жній кінець якої біжить по лінії $y_1 = -2\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$, а верхній

Рис.9.12

по $y_2 = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$.

Змінна x тоді пробігає значення від $x_1 = -4$ до $x_2 = 4$.

Отже, отримаємо інтеграл виду:

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x;y)dxdy = \int\limits_{-4}^{4} dx \int\limits_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}} f(x,y)dy.$$

1.6. Подвійний інтеграл в полярних координатах

Нехай в площині Oxy задана замкнена область $\overline{D}$, а в площині $O'uv$ – $\overline{E}$. Між точками цих замкнених областей встановлено взаємно однозначну відповідність, яка визначається формулами $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Тоді

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{E}} f(x(u,v), y(u,v))\cdot |I(u,v)|\,du\,dv, \text{ де } I(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Функціональний визначник $I(u,v)$ називають визначником Остроградського-Якобі.

При переході від декартових координат до полярних отримаємо

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{E}} f(\rho\cdot\cos\varphi, \rho\cdot\sin\varphi)\cdot\rho\,d\varphi\,d\rho$$

Отже, щоб перейти в подвійному інтегралі від декартової системи координат до полярної і обчислити його, необхідно:

1) записати межу області $\overline{D}$ у полярних координатах;

2) замінити аргументи *x* та *y* підінтегральної функції відповідно на $x = \rho\cos\varphi$ і $y = \rho\sin\varphi$;

3) замінити елемент площі $dxdy$ на $\rho d\rho d\varphi$;

4) розставити межі інтегрування по області $\overline{E}$;

5) обчислити повторний інтеграл.

Зауваження. Перехід в подвійному інтегралі до полярних координат доцільно використовувати в тих випадках, коли підінтегральна функція залежить від $x^2 + y^2$ або від $arctg\frac{y}{x}$, а також у випадках, коли межа області $\overline{D}$ містить дуги кіл та промені, що виходять з початку координат.

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}(1-x^2-y^2)dxdy$, де область $\overline{D}$ обмежена кривими $y = \sqrt{4-x^2}$, $\quad 0 \le y \le x.$

Розв’язання. Підінтегральна функція залежить від x^2+y^2, тому перейдемо до полярних координат. Підставимо в нерівність $0\le y\le x$ $x=\rho\cos\varphi$ і $y=\rho\sin\varphi$. Одержимо

$$0\le\rho\sin\varphi\le\rho\cos\varphi,\quad 0\le\sin\varphi\le\cos\varphi,\quad 0\le tg\varphi\le 1,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}.$$

$$\iint\limits_D\left(1-x^2-y^2\right)dxdy=\left\{\begin{matrix}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ dxdy=\rho d\rho d\varphi\end{matrix}\right\}=\iint\limits_E\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{2}\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\left(1-\rho^2\right)d\left(1-\rho^2\right)\right)d\varphi=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\left(1-\rho^2\right)^2}{2}\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=2}d\varphi==-\frac{1}{4}(-3-1)\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Приклад 6. За допомогою переходу до полярних координат обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D artg\dfrac{y}{x}dxdy$ де область $\overline{D}-$частина кільця $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,$ обмежена лініями $y=\sqrt{3}x,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

Розв’язання. Підінтегральна функція залежить від $arctg\dfrac{y}{x}$, тому перейдемо до полярних координат (рис.9.13). Підставимо в нерівність $\dfrac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}x$ $x=\rho\cos\varphi$ і $y=\rho\sin\varphi$. Одержимо

$$\frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}}\le\rho\sin\varphi\le\sqrt{3}\rho\cos\varphi,\qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\le tg\varphi\le\sqrt{3},\qquad \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$$

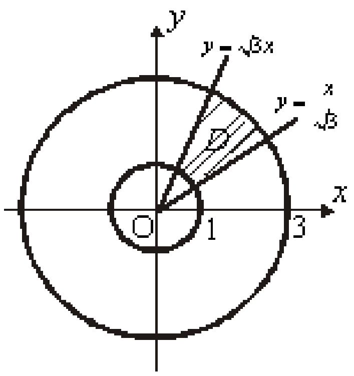


Рис.9.13

$$\iint\limits_D artg\frac{y}{x}dxdy=\begin{vmatrix}x=\rho\cos x\\ y=\rho\sin x\\ I=\rho\end{vmatrix}=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_1^3 arctg(tg\varphi)\rho d\rho=$$

$$=\left(\alpha=\frac{\pi}{6},\ \beta=\frac{\pi}{3}\right)=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi d\varphi\int\limits_1^3\rho d\rho=\frac{\varphi^2}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_1^3=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\rho^2}{36}\right)(9-1)=2\cdot\frac{3\pi^2}{36}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулювати задачу про об’єм циліндричного тіла.
2. Що називається подвійним інтегралом від функції $z=f(x,y),$ по області $\overline{D}$?
3. Сформулювати достатню умову існування подвійного інтеграла.
4. Перерахувати властивості подвійного інтеграла.
5. У чому полягає геометричний і механічний зміст подвійного інтеграла?

6. Яка область $\overline{D}$ називається правильною в напрямі осі Oy? Записати формулу для обчислення подвійного інтеграла по такій області.

7. Записати формулу для обчислення подвійного інтеграла по області $\overline{D}$ у випадку, коли ця область правильна в напрямі осі Ox.

8. Записати формули для обчислення подвійного інтеграла через повторні для двох видів областей інтегрування (прямокутної та криволінійної).

9. Сформулювати теорему про заміну змінних у подвійному інтегралі.

10. Чому дорівнює якобіан у полярних координатах?

11. Як обчислюється подвійний інтеграл за допомогою повторного у полярних координатах?

Навчальні завдання

85. Змінити порядок інтегрування в таких інтегралах:

а) $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x;\ y)dy,$ б) $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x;\ y)dy,$ в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x;\ y)dy,$

г) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x;\ y)dy,$ д) $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x;\ y)dy,$ е) $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x;\ y)dy.$

86. Обчислити повторні інтеграли:

а) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 \left(x^2 + 2y\right)dx,$ б) $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2},$

в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2 dy}{1+y^2},$ г) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2 dy}{y^2}.$

87. Обчислити подвійні інтеграли зведенням їх до повторних у разі прямокутної області $\overline{D} = \{(x;\ y) \in R^2 \,|\, a \le x \le b,\ c \le y \le d\}.$

а) $\iint\limits_{\overline{D}} (x+y)dxdy;\ \ 0 \le x \le 1,\ \ 1 \le y \le 2,$ б) $\iint\limits_{\overline{D}} xy(x-y)dxdy;\ \ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 2,$

г) $\iint\limits_{\overline{D}} \frac{dxdy}{(x-y)^2};\ \ 1 \le x \le 2,\ \ 3 \le y \le 4,$ д) $\iint\limits_{\overline{D}} y\cos^2 x\,dxdy;\ \ 0 \le x \le 2\pi,\ \ 0 \le y \le 1.$

89. Обчислити подвійні інтеграли зведенням їх до повторних у разі області *D*, що обмежена даними лініями:

а) $\iint\limits_{D} xdxdy;\ \ x=0,\ \ y=x^3,\ \ x+y=2,$ б) $\iint\limits_{D} \sin(x+y)dxdy;\ \ x=y,\ \ y=0,\ \ x+y=\frac{\pi}{2},$

в) $\iint\limits_{D} x^2 ydxdy;\ \ y=0,\ \ y=1-x^2,$ г) $\iint\limits_{D} \left(1-y^2-x^2\right)dxdy;\ \ x=1,\ \ y=x,\ \ y=2x.$

90. За допомогою переходу до полярних координат обчислити такі подвійні інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(x^2+y^2+1\right)dy,$ б) $\iint\limits_D (2-2x-3y)dxdy;\ \overline{D}=\left\{(x;\ y)\in R^2 \middle| x^2+y^2\le 4;\ y\ge 0\right\}.$

Завдання для самостійної роботи

91. Змінити порядок інтегрування в таких інтегралах:

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x;\ y)dy,$ б) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x;\ y)dy.$

92. Обчислити такі повторні інтеграли:

а) $\int\limits_{-3}^3 dy \int\limits_0^1 4\left(x^3+2y^2\right)dx,$ б) $\int\limits_{-2}^4 dx \int^2 \frac{dy}{x^2-y^2}.$

93. Обчислити подвійні інтеграли зведенням їх до повторних у разі прямокутної області $\overline{D}=\{(x;\ y)\in R^2 \,|\, a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$.

а) $\iint\limits_D (\sqrt{x}y^3)dxdy,\ 0\le x\le 4,\ 0\le y\le 2;$ б) $\iint\limits_D (x^2-4y)dxdy,\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4.$

94. Обчислити подвійні інтеграли зведенням їх до повторних у разі області , що обмежена даними лініями:

а) $\iint\limits_D (1+2x+2y)dxdy;\ \ y=x,\ \ y=0,\ \ x+y=1,$

б) $\iint\limits_D (4-y)dxdy;\ \ y=1,\ \ 4y=x^2,\ \ x\ge 0.$

95. За допомогою переходу до полярних координат обчислити такі подвійні інтеграли:

а) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy;\ \overline{D}=\left\{(x;\ y)\in R^2 \middle| x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0,\ x\ge 0\right\}.$

б) $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy;\ \ \overline{D}=\left\{(x;\ y)\in R^2 \middle| x^2+y^2\le 3x\right\}.$

§ 2. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Поняття потрійного інтеграла

Схема побудови потрійного інтегралу така сама, як і звичайного визначеного інтеграла та подвійного інтеграла.

Розглянемо в просторі R_3 деяку замкнену область $\overline{G}$. Нехай в області $\overline{G}$ і на її границі визначена деяка неперервна функція u = $f(x, y, z)$. Розіб'ємо просторову область $\overline{G}$ довільним чином на n частин: $\overline{G} = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} \overline{G}_k$.

Об'єми цих частин позначимо через ΔV_k. В кожній області $\overline{G}_k$ виберемо довільну точку $P_k(x_k, y_k, z_k)$і утворимо інтегральну суму

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k .$$

Оскільки функція $f(x, y, z,)$ є неперервною в області $\overline{G},$ а сама область $\overline{G}$ є замкненою і обмеженою, то існує скінченна границя інтегральної суми незалежно від способу розбиття області $\overline{G}$ на частини $\overline{G}_k$ і від вибору точок $P_k(x_k, y_k, z_k)$ при умові, що максимальний діаметр області $\overline{G}_k$ прямує до 0 то ця границя називається *потрійним інтегралом* від функції $f(x, y, z)$ по області $\overline{G}$, тобто;

$$\lim_{\substack{\max diam G_k \to 0 \\ 1 \le k \le n}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = \iiint\limits_{\vec{G}} f(x, y, z,) dV$$

Елементарний об'єм $dV = dxdydz$, тому

$$\boxed{\iiint\limits_{\vec{G}} f(x, y, z,) dV = \iiint\limits_{\vec{G}} f(x, y, z,) dxdydz.}$$

1.2. Властивості потрійних інтегралів

1°. Якщо $f(x, y, z,) = C$, C – стала величина, то $\iiint\limits_{\vec{G}} C dxdydz = CV$,

де V - об'єм області $\overline{G}$. Зокрема при $C = 1$ дістаємо:

$\iiint\limits_{\vec{G}} dxdydz = V$ - це геометричне тлумачення потрійного інтеграла.

Але якщо функція $f(x, y, z,) \neq 1$, то потрійний інтеграл не має геометричного тлумачення оскільки не має геометричного чотиривимірної системи координат.

2°. Потрійний інтеграл від суми кількох інтегрованих функцій дорівнює сумі потрійних інтегралів від доданків:

$$\iiint\limits_{G}(f(x,y,z,)\pm\varphi(x,y,z))dxdydz=\iiint\limits_{G}f(x,y,z,)dxdydz\pm\iiint\limits_{G}\varphi(x,y,z)dxdydz$$

3°.(*Адитивність потрійного інтегралу*)

$$\iiint\limits_{G}f(x,y,z,)dxdydz=\iiint\limits_{G_1}f(x,y,z,)dxdydz+\iiint\limits_{G_2}f(x,y,z,)dxdydz \quad \overline{G}=\overline{G}_1\bigcup\overline{G}_2$$

4°. Якщо $f(x,y,z,)\geq 0$, то $\iiint\limits_{\overline{G}}f(x,y,z,)dxdydz\geq 0$

Оскільки $f(x,y,z,)\leq|f(x,y,z,)|$, то

$$\left|\iiint\limits_{\overline{G}}f(x,y,z,)dxdydz\right|\leq\iiint\limits_{\overline{G}}|f(x,y,z,)|dxdydz$$

5°. (*Теорема про середнє значення*) Якщо функція $f(x,y,z,)$ є неперервною в кожній точці області $\overline{G}$, то існує така точка $(x_0,y_0,z_0)\in\overline{G}$, що

$$\iiint\limits_{\overline{G}}f(x,y,z,)dxdydz=f(x_0,y_0,z_0)V,$$

де V – об'єм області $\overline{G}$.

Величину

$$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\overline{G}}f(x,y,z,)dxdydz$$

називають *середнім значенням* функції $f(x,y,z,)$ в області $\overline{G}$.

1.3. Обчислення потрійного інтеграла

Як і у випадку подвійних інтегралів, обчислення потрійного інтеграла зводяться до обчислення повторних, тобто до інтегрування по кожній змінній окремо.

Нехай $\overline{G}$ деяка просторова область, що обмежена замкненою поверхнею S. Область називають *правильною* за напрямом осі Oz, якщо вона має такі властивості:

1) будь-яка пряма, що паралельна осі Oz перетинає поверхню S не більше ніж у двох точках;

2) уся область $\overline{G}$ проектується на площину xOy в правильну двовимірну область $\overline{D}$.

Аналогічно визначаються правильні тривимірні області за напрямами осей Ox, Oy

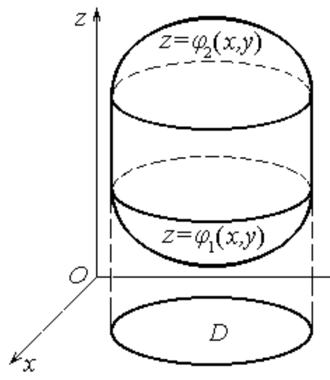


Рис.9.14

Область $\overline{G}$ є *правильною* тривимірною областю, якщо вона правильна за напрямами усіх трьох осей.

Правильними тривимірними областями є еліпсоїди, піраміди, призми та інші тіла.

Для таких областей обчислення потрійного інтеграла зводиться до обчислення одного однократного і одного подвійного, або трьох однократних.

Якщо, наприклад, область $\overline{G}$ є правильною за напрямом осі Oz:

$\bar{G} = \{\varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y), \quad y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b\}$

де $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), y_1(x), \ y_2(x)$ – неперервні функції (рис.2.1) , то потрійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iiint\limits_{\bar{G}} f(x,y,z,)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{\varphi_1(x_1,y_1)_1}^{\varphi_2(x_2 y_2)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Зокрема, якщо область інтегрування є паралелепіпед:

$$\iiint\limits_{\bar{G}} f(x,y,z,)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^l f(x,y,z)dz$$

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{\bar{G}} (x+y+z)dxdydz$ де $\overline{G}$ – область, обмежена площинами *x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1*.

Розв’язання.

Оскільки область *G* – куб: $\overline{G} = \{(x;\ y,z) \in R^3 | 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$, то за формулою

$$\iiint\limits_{\bar{G}} f(x,y,z,)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^l f(x,y,z)dz$$

маємо

$$\iiint\limits_G (x+y+z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x+y+z)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(\left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 dy \right) =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dy == \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right) \Bigg|_0^1 dx = \int\limits_0^1 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G zdxdydz$, якщо область $\overline{G}$ – обмежена площинами *x* = 0, , *y* = 0, *z* = 0, *x* + *y* + *z* –1= 0 (рис. 9.15).

Розв'язання. Область $\overline{G}$ *є* правильною за напрямом осі *Oz* і проектується на площину xOy в трикутник $\overline{D}=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$.

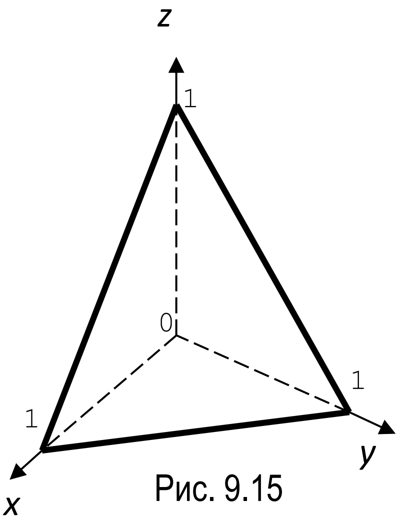


Рис. 9.15

Оскільки *z* змінюється від 0 до *z = 1 - x – y* , то використовуючи формулу

$$\iiint\limits_{\vec{G}} f(x,y,z,)dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int\limits_{Z_1(x_1,y_1)_1}^{Z_2(x_2y_2)} f(x,y,z)dz=$$

$$=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{Z_1(x,y)}^{Z_1(x,y)} f(x,y,z)dz$$

маємо

$$\iiint\limits_G zdxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y} zdz=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)^2dy==-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)^2d(1-x-y)=$$

$$=\frac{1}{6}\int\limits_0^1(1-x)^3dx=-\frac{1}{24}(1-x)\Big|_0^1=\frac{1}{24}.$$

Приклад 3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G xyzdxdydz$ якщо область $\overline{G}$ – обмежена площинами $x=0,\ ,y=0,z=0,\ x^2+y^2+z^2=4$ (рис 9.16).

Розв'язання. Область $\overline{G}$ проектується на площину xOy в чверть круга $x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$.

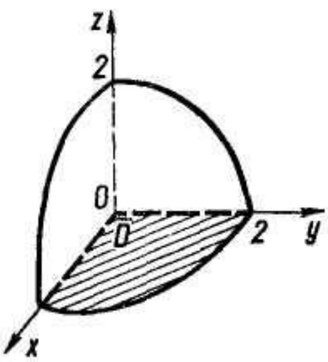


Рис. 9.16

Змінна z змінюється від 0 до $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

$$\iiint\limits_G xyzdxdydz=\iint\limits_{\overline{D_{xy}}} xydxdy\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz=\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} ydy\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} y\left(4-x^2-y^2\right)dy==\frac{1}{2}\int\limits_0^2 x\left(2y^2-\frac{x^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(\frac{x^5}{4}-2x^3+4x\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{24}-\frac{x^4}{2}+2x^2\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

1.4. Потрійний інтеграл в циліндричних координатах

Циліндричними координатами точки $M(x,y,z)$ називають числа ρ,φ,z, де ρ і φ - полярні координати (рис. 9.17). Тоді

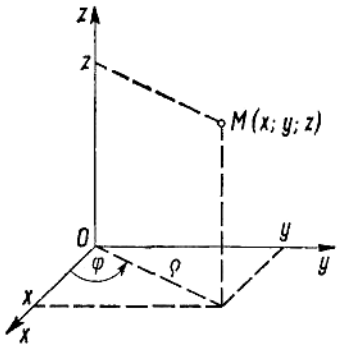


Рис. 9.17

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi & 0 \le \varphi \prec 2\pi \\ y = \rho\sin\varphi & 0 \le \rho \prec +\infty \\ z = z & -\infty \prec z \prec +\infty \end{cases}$$

Якобіан такого перетворення має вигляд:

$$j = \begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho & z'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho \cdot$$

Тоді потрійний інтеграл в циліндричних координатах:

$$\iiint\limits_{\bar{G}} f(x, y, z,)dxdydz = \iiint\limits_{\bar{V}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz$$

Добуток $\rho d\rho d\varphi dz$ визначає елемент об'єму в циліндричній системі координат.

Приклад 4. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{\bar{G}} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ якщо область $\bar{G}$ розміщена в першому октанті і обмежена площинами *y* = 0, *z* = 2, $z = 0$, $z = 2$ і циліндром $x^2 + y^2 = 2x$ (рис. 9.18).

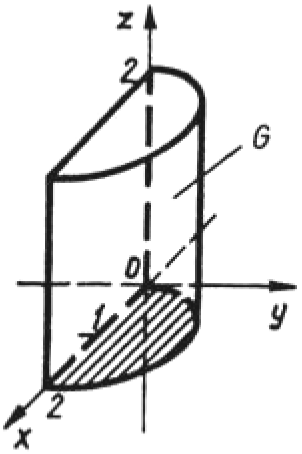


Рис. 9.18

Розв'язання. Введемо циліндричні координати

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z.$$

Оскільки в циліндричній системі координат $x^2 + y^2 = \rho^2$ а рівняння кола $x^2 + y^2 = 2x$, яке лежить в основі циліндра, має вигляд $\rho = 2\cos\varphi$, то за формулою

$$\iiint\limits_{\bar{G}} f(x, y, z,)dxdydz = \iiint\limits_{\bar{V}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi$$

Маємо

$$\iiint\limits_{\bar{G}} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iiint\limits_{G} z\rho^2 d\rho d\varphi dz$$

де $V = \left\{(\rho, \varphi, z) \middle| 0 \le \rho \le 2\cos\varphi, 0 \le \rho \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le z \le 2\right\}.$

Тому

$$\iiint\limits_{\bar{G}} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho \int\limits_0^2 zdz = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{16}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{16}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\varphi)\cos\varphi d\varphi = \frac{16}{3}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{9}.$$

1.5. Потрійний інтеграл в сферичній системі координат

Сферичними координатами точки $M(x,y,z)$ називаються числа ρ,φ,θ (рис. 2.6).

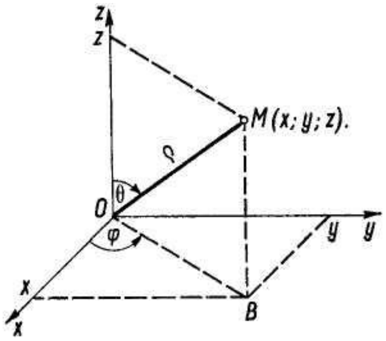


Рис. 9.19

Де θ – кут між віссю Oz і радіус-вектором OM точки M; ρ – довжина цього радіус-вектора, тобто відстань від точки M до початку координат; φ – кут між проекцією OB радіус-вектора OM на площину Oxy і віссю Ox.

При переході від прямокутних координат до сферичних використовуються формули:

$$OB = \rho\sin\theta$$

$$\begin{cases} x = OB\cos\varphi = \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \le \theta \le \pi \\ y = OB\sin\varphi = \rho\sin\theta\sin\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi \\ z = \rho\cos\theta & 0 \le \rho < +\infty \end{cases}$$

Елементарний об'єм в прямокутній системі координат і в сферичній системі координат пов'язані співвідношенням $dxdydz = |J|d\rho d\varphi d\theta$ де якобіан перетворення

$$J(\rho,\varphi,\theta) = -\rho^2\sin\theta.$$

Оскільки елементарний об'єм $dxdydz = |J(\rho,\varphi,\theta)|d\rho d\varphi d\theta = \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$, то

$$\iiint\limits_{\overline{G}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\overline{V}} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$$

Назва "сферичні координати" пов'язана з тим, що координатна поверхня є сферою.

Зауваження. При обчисленні потрійного інтеграла в циліндричних чи сферичних координатах область $\overline{V}$ не будують, межі інтегрування знаходять безпосередньо за областю $\overline{G}$, користуючись геометричним змістом нових координат.

Приклад 5. Обчислити потрійний інтеграл

$\iiint\limits_{\overline{G}} \left(1 + \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)^5 dxdydz$, де $\overline{G}$ - верхня частина кулі

$$x^2+y^2+z^2 \le 1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\theta = \rho^2.$$

Розв'язання.

$$\iiint\limits_{\overline{G}} \left(1 + \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)^5 dxdydz = \iiint\limits_{\overline{V}} \left(1 + \left(\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)^5 \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1+\rho^3\right)^5\rho^2 d\rho = -\frac{1}{3}\cos\theta\Big|_0^{\pi} \varphi\Big|_0^{2\pi} \frac{\left(1+\rho^3\right)^6}{6}\Bigg|_0^1 = .\frac{2}{3}2\pi\frac{1}{6}\left(2^6-1\right) = \frac{2\pi}{9}63 = 14\pi.$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулювати означення потрійного інтеграла.

2. Сформулювати достатню умову існування потрійного інтеграла.

3. Сформулювати властивості потрійного інтеграла.

4. Як обчислюється потрійний інтеграл в прямокутних координатах?

5. Як обчислюється потрійний інтеграл з циліндричних координатах? Навести приклад області, для якої межі інтегрування в циліндричних координатах постійні.

6. Як обчислюється потрійний інтеграл в сферичних координатах? Для якої області межі інтегрування в сферичних координатах сталі?

Навчальні завдання

96. Обчислити повторні інтеграли:

а) $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z)dz;$ б) $\int_0^2 dx \int_0^x dy \int_0^y (x+y+z)dz.$

97. Обчислити потрійні інтеграли, якщо область інтегрування *G* обмежена даними поверхнями:

а) $\iiint_G (x^2+y^2+z^2)dxdydz,$ G – прямокутний паралелепіпед $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 3, \quad 0 \le z \le 2.$

б) $\iiint_G (2x+y^2-1)dxdydz,$ G – область, обмежена поверхнями $x^2+y^2=z, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=2.$

в) $\iiint_G (x-y)dxdydz,$ G – піраміда, утворена площинами $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y+z=1.$

98. Обчислити потрійні інтеграли, перейшовши до циліндричних або сферичних координат:

а) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^2 z\sqrt{x^2+y^2}dz;$

б) $\iiint_G (x^2+z^2)dxdydz,$ G – область, обмежена параболоїдом $2y=x^2+z^2$ і площиною *y*=2;

в) $\iiint_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,$ G – область, обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=4.$

Завдання для самостійної роботи

99. Обчислити повторні інтеграли:

а) $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (xy+z)dz;$ б) $\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y (x^2+5y+z)dz.$

100**.** Обчислити потрійні інтеграли, якщо область *G* інтегрування обмежена даними поверхнями:

а) $\iiint\limits_G (x^2+y^2)dxdydz,$ G – куб, $0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 2,\quad 0\le z\le 2.$

б) $\iiint\limits_G (x-y)dxdydz,$ G – піраміда, утворена площинами $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+2y+3z=1.$

101. Обчислити потрійні інтеграли, перейшовши до циліндричних або сферичних координат:

а) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} dz\int_0^1 y\sqrt{x^2+y^2}dy;$

б) $\iiint\limits_G (x^2+z^2)dxdydz,$ G – область, обмежена нерівностями $4\le x^2+y^2+z^2\le 9,\quad z\ge 0.$

§ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНИХ ТА ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДО ЗАДАЧ ГЕОМЕТРІЇ І МЕХАНІКИ

1.1. Площа плоскої фігури

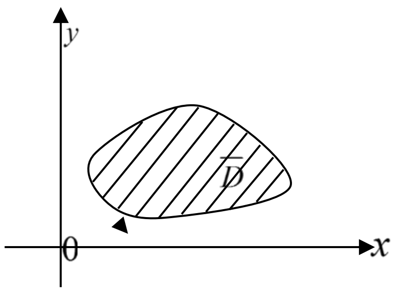


Рис. 9.20

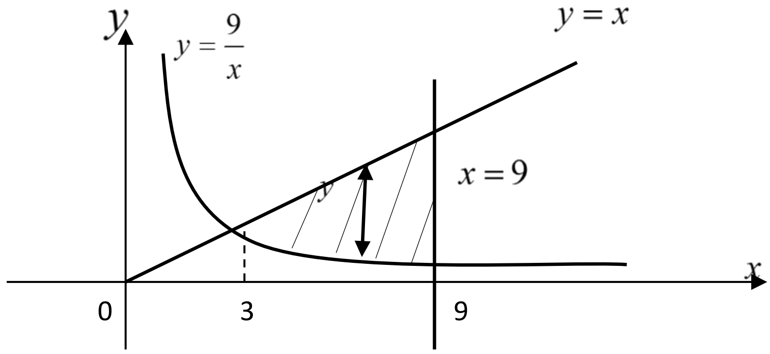
$$S=\iint\limits_{\overline{D}} dx\,dy$$

У полярній системі координат ρ і φ формула має вигляд

$$S=\iint\limits_{\overline{E}} \rho d\rho d\varphi.$$

Приклад 1. Записати подвійний інтеграл і обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y=\dfrac{9}{x}$, $y=x$, $x=9$.

Розв'язання. Зобразимо дану фігуру (рис. 9.21). Знайдемо межі інтегрування:



$$\begin{cases} y=\frac{9}{x}, \\ y=x, \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{9}{x}, \\ y=x, \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=3, \end{cases}$$

або $\begin{cases} x=-3, \\ y=-3. \end{cases}$

Рис.9.21

Точці перетину графіків $y=\frac{9}{x}$ та $y=x$ відповідають координати $(3;3)$. Виберемо порядок інтегрування і розставимо межі інтегрування. Спочатку будемо інтегрувати по змінній y.

Для цього проведемо стрілку паралельну осі Oy. Тоді з рисунка отримаємо: $y_1=\frac{9}{x}$, $y_2=x$, $x_1=3$, $x_2=9$.

$$S=\iint\limits_{\overline{D}} dx\,dy=\int\limits_3^9 dx\int\limits_{\frac{9}{x}}^{x} dy=\int\limits_3^9 y\Big|_{\frac{9}{x}}^{x} dx=\int\limits_3^9\left(x-\frac{9}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-9\ln x\right)\Bigg|_3^9=\frac{81}{2}-9\ln 9-\left(\frac{9}{2}-9\ln 3\right)=$$

$=36-9\ln 3$ (кв.од.).

1.2. Об'єм циліндричного тіла

Під циліндричним тілом розуміють тіло, яке обмежене зверху поверхнею $z=f(x,y)$, знизу – площиною Oxy, бічна поверхня якого є циліндричною з твірною паралельною вісі Oz (рис. 9.8).

Фігуру $\overline{D}$, яка лежить в площині Oxy, називають основою циліндричного тіла. Тоді

$$V=\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dx\,dy. \qquad V=\iiint\limits_{G} dxdydz.$$

$$V=\iiint\limits_{G'} \rho d\rho d\varphi dz \qquad V=\iiint\limits_{G''} \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$$

Приклад 2. Обчислити об'єм тіла, фігури, обмеженого поверхнями $y=x^2,\quad y=1,$ $x+y+z=4,\quad z=0$.

Розв'язання. Задане тіло є параболічним циліндром $y=x^2$, обмеженим зверху частиною площини $z=4-x-y,$ а знизу частиною площини Oxy, вміщеної між

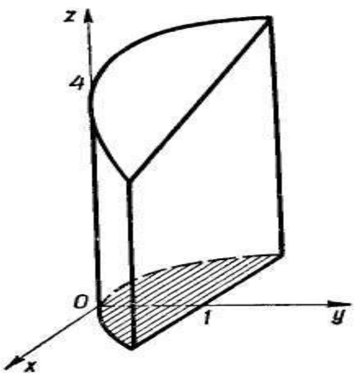


Рис. 9.22

параболою $y = x^2$ та прямою $y = 1$ (область $\overline{D}$ на рисунку 9.22 заштрихована).

За формулою $V = \iint\limits_{\overline{D}} f(x, y)\, dx\, dy$ маємо

$$V = \iint\limits_{\overline{D}} (4 - x - y)\, dx\, dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (4 - x - y) dx =$$

$$= \int_0^1 \left((4 - y)x - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dy = 2\int_0^1 (4 - x)\sqrt{y} dy = \frac{68}{15}.$$

Приклад 3. Користуючись потрійним інтегралом обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = 4 - x^2, \quad y = 5, \quad y = 0, \quad z = 2$.

Розв'язання. Поверхня, яка обмежує об'єм зверху, це поверхня – параболічний циліндр з твірними паралельними вісі *OY:* $z = 4 - x^2$, знизу - $z = 2$, з боків: $y = 5, \quad y = 0$.

Зобразимо цю поверхню (*рис. 9.23),* та її проекцію на площину xOy *(рис. 9.24).*

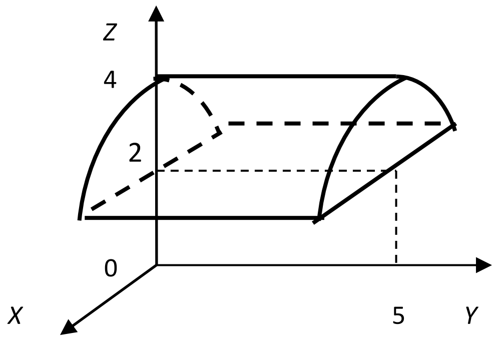


Рис. 9.23

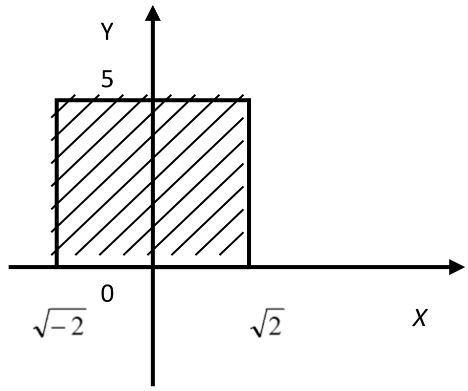


Рис. 9.24

У формулу для обчислення об'єму *V*= $\int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz$ підставимо границі інтегрування, враховуючи симетрію тіла відносно площини yOz.

$$\frac{V}{2} = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^5 dy \int_2^{4-x^2} dz = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^5 (z\Big|_2^{4-x^2}) dy = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^5 (2 - x^2) dy = \int_0^{\sqrt{2}} ((2y - x^2 y)\Big|_0^5) dx = = \int_0^{\sqrt{2}} (10 - 5x^2) dx =$$

$$(10x - 5\frac{x^3}{3})\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{3}.$$

1.3. Площа поверхні

Поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, причому $\overline{D}$ є проекцією поверхні на площину Oxy. Площа P поверхні, яка проектується на площину Oxy в область $\overline{D}$ і задається функцією $z = f(x,y) \geq 0$ і частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ - неперервні функції в області $\overline{D}$, знаходиться за формулою

$$P = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

Приклад 4. Обчислити площу частини поверхні $x^2+y^2=2z$ що вирізається циліндром $x^2+y^2=1$.

Розв'язання. Дана поверхня – параболоїд (рис.9.25). Обчислимо частинні похідні функції $\frac{x^2+y^2}{2}=z$

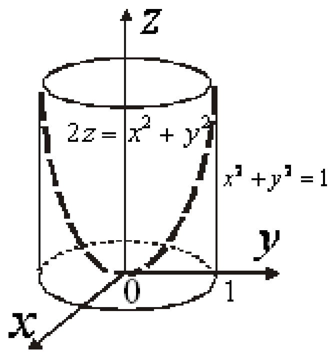


Рис. 9.25

$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)'_x = x, \quad \frac{df}{dy}=\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)'_y = y.$$

$$P=\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\frac{x^2+y^2}{2}}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dy=$$

Область $\overline{D}$ інтегрування є круг з радіусом, що дорівнює 1. Тоді маємо, перейшовши в подвійному інтегралі до полярних координат:

$$=\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)}{3}.$$

1.4. Застосування подвійних та потрійних інтегралів до задач з механіки

1) Якщо пластинка займає область $\overline{D}$ площини xOy і має змінну поверхневу густину $\gamma=\gamma(x,y)\left[\frac{кг}{м^3}\right]$:

Маса пластинки	$m=\iiint_D \gamma(x,y)dxdy.$
Статичні моменти	$M_x=\iint_D y\gamma(x,y)dxdy,$ $M_y=\iint_D x\gamma(x,y)dxdy.$
Координати x_c і y_c центра мас пластинки	$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\iint_D x\gamma(x,y)dxdy,}{\iint_D \gamma(x,y)dxdy,},$

	$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y\gamma(x,y)dxdy,}{\iint_D \gamma(x,y)dxdy,}.$
Моменти інерції I_x ,I_y, I_o пластинки відносно осей координат Ox, Oy і початку координат	$I_x = \iint_D y^2\gamma(x,y)dxdy,$ $I_y = \iint_D x^2\gamma(x,y)dxdy,$ $I_o = I_x + I_y = \iint_D (x^2+y^2)\gamma(x,y)dxdy.$

2) Нехай маса розділена по замкненій області $\overline{G} \subset R_3$ з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x,y,z)\left[\frac{кг}{м^3}\right]$, де $\gamma(x,y,z)$ - неперервна функція в $\overline{G}$.

Маса всього тіла	$m = \iiint_{\overline{D}} \gamma(x,y,z)dxdydz$ $m = \iiint_{\overline{G}} \gamma(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz$ - маса в циліндричних координатах.
Статичні моменти M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} неоднорідного тіла $\overline{G}$ відносно координатних площин O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}	$(dM_{xy} = zd_m)$ $M_{xy} = \iiint_{\overline{G}} z\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz$ $(dM_{xz} = yd_m)$ $M_{xz} = \iiint_{\overline{G}} y\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz$ $(dM_{yz} = xd_m)$ $M_{yz} = \iiint_{\overline{G}} x\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz$
Координати x_c і y_c центра мас пластинки	$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint_G x\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iint_G \gamma(x,y,z)dxdydz,},$ $y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint_G y\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iint_G \gamma(x,y,z)dxdydz,},$ $z_c = \frac{M_{yx}}{m} = \frac{\iiint_G z\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iint_G \gamma(x,y,z)dxdydz,}.$
Моменти інерції I_x ,I_y, I_o пластинки відносно осей координат Ox, Oy і початку координат	$I_x = \iiint_{\overline{G}} (y^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz,$

	$I_y = \iiint\limits_G (x^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz,$ $I_z = \iiint\limits_G (y^2+x^2)\gamma(x,y,z)dxdydz.$

Якщо тіло однорідне, то вважають, що $\gamma = \gamma(x,y,z) = 1.$

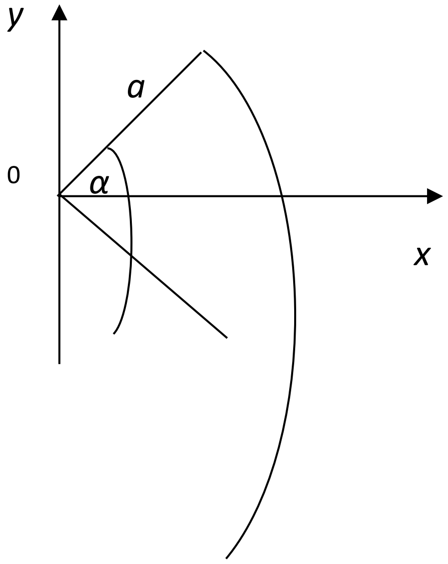


Рис.9.26

Приклад 5. Визначити координати центру тяжіння сектора однорідного круга радіусу *a* з центральним кутом *α*, розташованого симетрично відносно осі *Ox* (рис. 3. 8).

Розв'язання. Задачу зручно розв'язувати в полярних координатах. В формулах вигідно перейти до полярних координат, зробивши в них такі заміни:

$x = \rho\, cos\, \varphi,\ y = \rho\, sin\, \varphi,$ а елемент площі $dx\, dy$ заміненемо на $\rho d\rho d\varphi.$

Тоді,

$$x_c = \frac{\iint\limits_{\sigma} \rho^2 \cos\varphi d\rho d\varphi}{\iint\limits_{\sigma} \rho d\rho d\varphi}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi}{\iint\limits_{(\sigma)} \rho d\rho d\varphi}.$$

Слід вирахувати тільки x_c, так як із симетрії фігури відносно осі Ox слідує, що $y_c=0$. В області (σ) змінні *ρ* та *φ* змінюються в таких межах: змінна *ρ* від *0* до *a*; змінна *φ* від $-\frac{\alpha}{2}$ до $+\frac{\alpha}{2}$.

Тому чисельник дробу у виразові для x_c

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \cos\varphi d\rho d\varphi = \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} cos\varphi d\varphi \int\limits_0^a \rho^2 d\rho.$$

Враховуючи, що $\int\limits_0^a \rho^2 d\rho. = \frac{\grave{a}^3}{3}$, отримуємо

$$I = \frac{a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos\varphi d\varphi = \frac{a^3}{3}(\sin\varphi)\Bigg|_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{3}a^3 \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Знаменник дробу у формулі для x_c

$$I_1 = \iint\limits_{(\sigma)} \rho d\rho d\varphi = \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} d\varphi \int\limits_0^a \rho d\rho = \frac{1}{2} a^2 \alpha$$

(Ми могли б I_1 не вираховувати, так як із геометрії відомо, що площа кругового сектора радіуса *а* з центральним кутом α дорівнює половині добутку квадрата радіуса на центральний кут, виражений у радіанах).

Отже, $$x_c = \frac{\frac{2}{3} a^3 \sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2} a^2 \alpha} = \frac{2}{3} a \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \, см.$$

Запитання для самоперевірки

1. Записати формули для обчислення об'єму циліндричного тіла, площі плоскої фігури та площі поверхні.

2. Записати формули для обчислення маси, статистичних моментів та моментів інерції пластини.

Навчальні завдання

102. За допомогою подвійних інтегралів обчислити площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = x^2; \;\; y = x + 2;$ б) $y = \sqrt{x}; \;\; y = 2\sqrt{x}; \;\; x = 4;$ в) $9x^2 + 4y^2 = 36.$

103. Користуючись потрійним інтегралом, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $z = x^2 + y^2, \quad z = 2x^2 + 2y^2, \; y = x^2, \quad y = x;$

б) $z = \ln(x + y), \quad z = \ln(6 - x), \quad x = 0, \quad x + y = 2, \quad x - y = 2$.

104. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $z = x$, $x^2 + y^2 = 9, \; z = 0;$ б) $z = x^2 - y^2, \quad z = 0, \quad x = 3.$

105. Знайти масу квадратної пластинки із стороною 2*а*, якщо її густина пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей і в вершинах квадрата дорівнює одиниці.

106. Визначити статичні моменти однорідної чверті круга $x^2 + y^2 = 25$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) відносно координатних осей.

Завдання для самостійної роботи

107. За допомогою подвійних інтегралів обчислити площі фігур, обмежених лініями:

а) $x = y^2 - 2y; \;\; x + y = 0;$ б) $x = y; \;\; y = 5x; \;\; x = 1.$

108. Користуючись подвійним чи потрійним інтегралами, знайти об'єми тіл, що обмежені поверхнями:

а) $x = 0, \; y = 0, \; z = 0, \; x = 4, \; y = 4, \; z = x^2 + y^2 + 1;$

б) $x+y+z=1,\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$.

109. Визначити статичні моменти даної однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $x + y = 2$, $y = 0$, відносно координатних осей.

§ 4. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1. Криволінійний інтеграл першого роду

Криву $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$:

називають *гладкою*, якщо функції $x(t), y(t)$ – неперервно диференційовані, тобто якщо в кожній її точці існує дотична, що неперервно змінюється вздовж кривої.

Криву, що складається зі скінченної кількості гладких кривих і не має точок самоперетину, називають *кусково-гладкою.*

Нехай L - відрізок кусково-гладкої кривої з початком в точці A і кінцем в точці B, $z = f(x, y)$ - обмежена функція, задана в деякій області, в якій розташована крива L (рис. 9.27). Розіб'ємо криву L точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n = B$ на n елементарних дуг, довжини яких Δl_i. На кожній дузі виберемо точку M. Складемо суму $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta l_i$, де Δl_i – довжина дуги $A_{i-1}A_i$.

Таку суму називають *інтегральною сумою для функції* $f(x, y)$ *по кривій* AB.

Якщо інтегральна сума I_n при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i \to 0$ має скінченну границю I, яка не залежить ні від розбиття кривої AB, ні від вибору точок M_I, то її називають ***криволінійним інтегралом 1-го роду*** *(або криволінійним інтегралом по довжині дуги) від функції* $f(x, y)$ *по кривій* AB *і* позначають:

$$\int_L f(x,y)dl, \quad \text{або} \quad \int_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)dl.$$

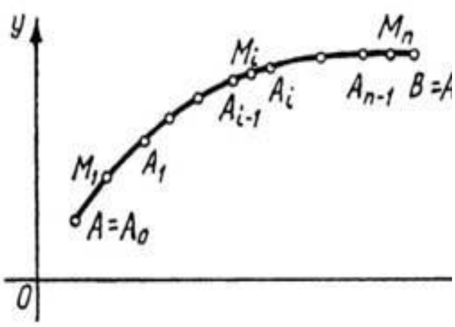


Рис. 9.27

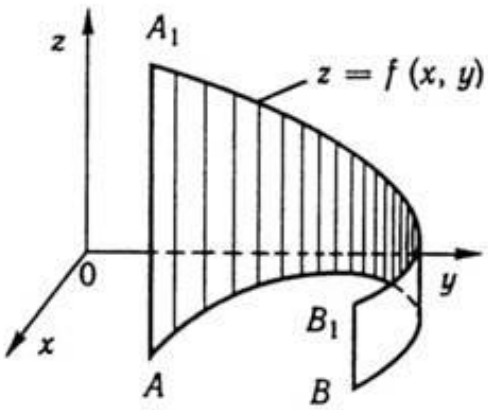


Рис. 9.28

Якщо границя *I* існує, то функція $f(x,y)$ називається *інтегровною на кривій* AB, крива AB – *контуром інтегрування*, A – *початковою*, а B – *кінцевою* точками інтегрування.

Криволінійний інтеграл першого роду зводиться до визначеного інтеграла за формулою:

$$\boxed{\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dl = \int_0^L f(x(l),y(l))dl,}$$

де L – довжина кривої AB. Дана формула не тільки зводить криволінійний інтеграл до звичайного, але й доводить існування криволінійного інтеграла для функції $f(x,y)$, яка неперервна на кривій AB.

Хоча криволінійний інтеграл першого роду безпосередньо зводиться до визначеного, між цими поняттями існує наступна відмінність. В інтегральній сумі величини Δl_i обов'язково додатні, незалежно від того, яку точку кривої AB ми рахуємо початковою, а яку – кінцевою, тобто

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dl = \int_{\overset{\cup}{BA}} f(x,y)dl\ .$$

у той час, як визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ при перестановці меж інтегрування змінює знак. А в усьому іншому криволінійний інтеграл першого роду має ті ж самі властивості, що і визначений інтеграл.

1.2. Геометричний зміст криволінійного інтеграла першого роду

Якщо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ при $f(x)\ge 0$ представляє собою площу криволінійної трапеції, то криволінійний інтеграл $\int_L f(x,y)dl$ при $z=f(x;y)\ge 0$ чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, твірні якої мають довжину $f(x;y)$ і паралельні осі Oz, а напрямна збігається з кривою AB на площині Oxy (рис. 9.28).

Зокрема, якщо AB не крива, а відрізок прямої $[a;b]$, розміщений на осі Ox, то $f(x,y)=f(x), \Delta l_i=\Delta x_i$, і криволінійний інтеграл буде звичайним визначеним інтегралом.

Якщо $f(x, y) = 1$, то одержимо криволінійний інтеграл $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} dl$, значення якого є довжина дуги кривої AB.

1.3. Фізичний зміст криволінійного інтеграла першого роду

Якщо крива AB – матеріальна, тобто вздовж кривої розподілено з лінійною густиною $\gamma = \gamma(x, y, z) \ge 0$ деяку масу m, то

$$\int\limits_L \mu(x, y, z)dl = m(L),$$

тобто з фізичної точки зору криволінійний інтеграл першого роду від невід'ємної функції вздовж деякої кривої дорівнює масі цієї кривої.

1.4. Основні властивості криволінійного інтеграла першого роду

1) $\int\limits_L 1dl = l(L)$; 2) лінійність; 3) адитивність.

1.5. Методи обчислення:

1. Явне задання кривої: $y = y(x)$, $x \in [a, b]$:

$$\int\limits_L f(x, y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

2. Параметричне задання кривої: $x = x(t),\ y = y(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$,

$$\int\limits_L f(x, y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt..$$

3. Крива L задана в полярних координатах: $\rho = \rho(\varphi),\quad \alpha \le \varphi \le \beta$,

$$\int\limits_L f(x, y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho_\varphi'^2 + \rho^2}d\varphi.$$

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_L \frac{dl}{x + 2y + 5}$, де L – відрізок прямої $y = 2x - 2$ між точками $A(0;-2)$, $B(1;0)$.

Розв'язання. За формулою

$$\int\limits_L f(x, y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

маємо $dl = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1 + 4}dx = \sqrt{5}dx,$

$$\int_L \frac{dl}{x+2y+5}=\int_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{x+2(2x-2)+5}=\sqrt{5}\int_0^1 \frac{dx}{5x+1}=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln|5x+1|\ \Big|_0^1=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln 6.$$

Приклад 2. Обчислити: $\int\limits_L xydl,\ (L):=(|x|+|y|=1).$

Розв'язання. Тут L є контур квадрата з центром у початку координат з довжиною сторони $\sqrt{2}$ (рис. 9.28).

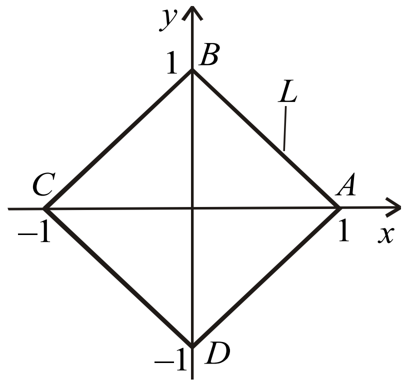


Рис. 9.28

$$\int_L xydl=\int_{(AB)} xydl+\int_{(BC)} xydl+\int_{(CD)} xydl+\int_{(DA)} xydl=$$

$$=2\left(\int_{(AB)} xydl+\int_{(BC)} xydl\right)=$$

$$=2\left(\int_0^1 x(1-x)\sqrt{1+(-1)^2}\,dx+\int_{-1}^0 (x+1)x\sqrt{2}dx\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\int_0^1 \left(x-x^2\right)dx+\int_{-1}^0 \left(x^2+x\right)dx\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^0\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+0-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\right)=0.$$

Поширимо поняття криволінійних інтегралів першого роду на просторові криві.

Розглянемо просторову криву

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \qquad t\in[a,b]: \\ z=z(t) \end{cases}$$

де функції $x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)$ неперервні на відрізку,а функція $f(x,y,z)$ визначена і неперервна вздовж кривої AB. Внаслідок неперервності $x'(t), y'(t), z'(t)$ крива AB є гладкою і її нескінченно малі дуги еквівалентні до своїх хорд. Елементарну дугу dl з точністю до малих вищого порядку можна прийняти за діагональ прямокутного паралелепіпеда з ребрами $dx, dy, dz.$ Тоді

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Таким чином, має місце формула:

$$\int_L f(x,y,z)dl=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} xyzdl$ якщо AB дуга лінії

$$x=t,\ y=\frac{t^2}{2},\ z=\frac{\sqrt{8t^3}}{3},\ 0\le t\le 1.$$

Розв'язання. Використовуючи формулу

$$\int\limits_{L} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

маємо

$$\int\limits_{\smile AB} xyzdl = \frac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_{0}^{1} t^2\sqrt{1+t^2+2t}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_{0}^{1} t^{\frac{9}{2}}(1+t)dt = \frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

1.5. Криволінійний інтеграл другого роду

Нехай функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ визначені і обмежені на гладкій чи кусково-гладкій кривій AB у площині xOy. На відміну від інтегралів першого роду крива AB розглядається як напрямна лінія (рис.9.29). Розіб'ємо криву L точками $A=A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n = B$ на n елементарних дуг, довжини яких Δl_i. На кожній дузі виберемо точку M.

Складемо суму

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} P(M_i)\Delta x_i, \quad \left(\sum_{i=0}^{n-1} Q(M_i)\Delta y_i\right),$$

де Δx_i – проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Ox,

Δy_i – проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Oy.

Таку суму називають *інтегральною сумою для функції $P(x,y)$ ($Q(x,y)$) по координаті x (y) вздовж кривої AB*.

Якщо інтегральна сума при I_n $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i \to 0$ має скінченну границю I, яка не залежить ні від розбиття кривої AB, ні від вибору точок M_i, то цю границю називають *криволінійним інтегралом від функції $P(x,y)$ (*або* $Q(x,y)$) по координаті x (*або* y) вздовж кривої AB і позначають*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx \quad \left(\int\limits_{AB} Q(x,y)dy\right)$$

Таким чином, суму

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$$

називають *криволінійним інтегралом по координатах* або *криволінійним інтегралом другого роду від функцій $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ по кривій AB* і позначають

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy$$

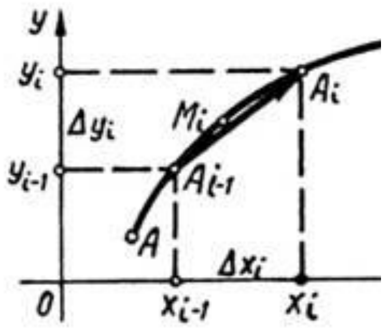
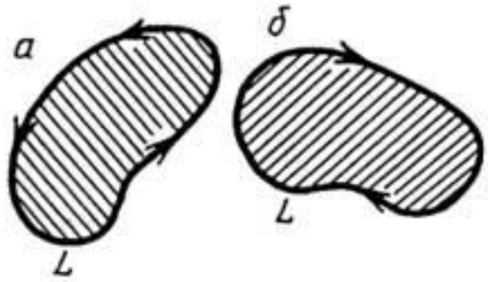


Рис. 9.29



а б

Рис. 9.30

Криволінійні інтеграли другого роду володіють основними властивостями визначених інтегралів – лінійністю, адитивністю, також для криволінійного інтегралу 2-го роду важливий напрямок інтегрування, тобто

$$\boxed{\int_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{\cup BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.}$$

Якщо контур L інтегрування замкнений, тобто коли точка B співпадає з точкою A, із двох можливих напрямів обходу замкненого контура L домовимося називати ***додатним*** той, при якому область, що розміщена всередині цього контура, залишається зліва по відношенню до точки, яка здійснює обхід (рис. 9.30 а). Протилежний напрям обходу контура *L* домовимось називати ***від'ємним*** (рис. 9.30 б)

Криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, що має додатний напрям, часто позначають

$$\boxed{\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy}$$

1.5. Методи обчислення:

1. Явне задання кривої: $y = y(x),\ x \in [a, b]$:

$$\int_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\,y'(x))dx.$$

2. Параметричне задання кривої:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]:$$

$$\int_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t))dt.$$

Приклад 4. Обчислити $\int\limits_L \left(y^2 dx + x^2 dy \right)$, де L — нижня дуга параболи $y^2 = x, \quad 0 \le x \le 1$, обхід якої здійснюється проти годинникової стрілки.

Розв'язання. За формулою

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x))dx$$

маємо:

$$\int\limits_L \left(y^2 dx + x^2 dy \right) = \int\limits_0^1 \left(x dx + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \right) = \int\limits_0^1 \left(x + \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \right) dx == \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = 0{,}7.$$

Поширимо поняття криволінійних інтегралів другого роду на просторові криві.

Розглянемо просторову криву AB, яку задано параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]: \\ z = z(t) \end{cases}$$

де функції $x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$, причому зміні параметра $t \in [\alpha, \beta]$ відповідає рух по кривій AB від A до B. Функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z), R(x, y, z)$ визначені і неперервні вздовж кривої AB.

Тоді справедлива формула

$$\int\limits_{\cup AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_\alpha^\beta (P(x(t), y(t), z(t) + Qy'(t) + Rz'(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$
$$+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt.$$

Криволінійний інтеграл другого роду має властивості, аналогічні властивостям визначеного інтеграла.

Приклад 5. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду $\int\limits_L ydx + (x+z)dy + (x-y)dz$, де L – відрізок прямої між точками $A(1;-1;1)$ і $B(2;3;4)$.

Розв'язання. Використаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

і знайдемо рівняння прямої, що проходить через точки $A(1;-1;1)$ і $B(2;3;4)$.

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y+1}{3+1} = \frac{z-1}{4-1}; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{3} = t.$$

Запишемо це рівняння в параметричному вигляді $x = 1 + t, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 1 + 3t.$

Обчислимо параметр t. Координата x змінюється від 1 до 2, тому $1 \le x \le 2, \quad 1 \le 1 + t \le 2, \quad 0 \le t \le 1.$ Відрізку AB відповідають значення параметра t: $\alpha = 0, \quad \beta = 1.$ Отримуємо

$$\int_L ydx+(x+z)dy+(x-y)dz=\int_0^1\big((-1+4t)+(2+4t)4+(2-3t)3\big)dt=\int_0^1(13+11t)dt=\left(13t+\frac{11t^2}{2}\Big|_0^1\right)=18{,}5.$$

1.6. Зв'язок між криволінійними інтегралами

Нехай $L=AB$ напрямлена просторова крива з початком A і B кінцем Тоді всі дотичні до L також напрямлені прямі (рис. 4.6).

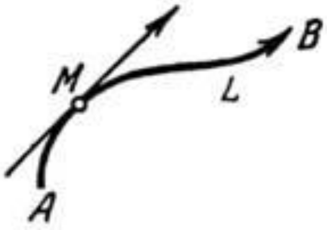


Рис. 9.31

Нехай α,β,γ кути, які утворює дотична до L з осями координат. Вони є функціями координат x, y, z точки дотику M. Виділимо з L елементарну дугу dl. Якщо рахувати її прямолінійною, то вона представляє собою вектор $\overrightarrow{dl}$ з проекціями.

Тоді

$$dx=\cos\alpha dl,\quad dy==\cos\beta dl,\quad dz=\cos\gamma dl$$

$$\boxed{\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dl.}$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляючі косинуси дотичної, в припущенні, що її напрямок відповідає напрямку шляху інтегрування.

Формула Гріна *(зв'язок криволінійного та подвійного інтегралів):*

Нехай деяка правильна область S, обмежена замкненим контуром L, і функції $P(x, y)$, $Q(x,y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ у цій області.

Тоді справедлива формула Гріна:

$$\boxed{\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy}$$

Яка перетворює криволінійний інтеграл від $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, взятого (проти годинникової стрілки) вздовж замкнутого контура *L*, в подвійний інтеграл по області S, обмеженої цим контуром.

Приклад 6. Користуючись формулою Гріна, обчислити інтеграл

$\oint_L (x^5-2y)dx+(3x+y^8)dy$ де L – коло $x^2+y^2=r^2$.

Розв'язання. Функції

$$P(x,y)=(x^5-2y),\quad Q=(3x+y^8),\ \frac{\partial P}{\partial y}=-2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=3$$

неперервні в замкненому колі $x^2+y^2=r^2$. Тому справедлива формула Гріна.

Тоді

$$\oint_L (x^5 - 2y)dx + (3x + y^8)dy = \iint_D (3 - (-2))dxdy = 5\iint_D dxdy = 5S = 5\pi r^2.$$

1.7. Застосування криволінійних інтегралів:

1. Знаходження довжин кривих: $l = \int_L dl.$

2. Знаходження площ фігур: $S = \dfrac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$

3. Застосування в механіці: маса кривої: $m = \int_L \gamma(x,y,z)dl,$

4. Координати центра мас; $x_c = \dfrac{1}{m}\int_L x\gamma(x,y,z)dl$, $y_c = \dfrac{1}{m}\int_L y\gamma(x,y,z)dl$, $z_c = \dfrac{1}{m}\int_L z\gamma(x,y,z)dl$.

5. Робота сили вздовж кривої:

$A = \int_L Pdx + Qdy + Rdz,$ де $P,\ Q,\ R$ - координати сили $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, причому функції $P(x, y)$, $Q(x,y)$ неперервні на кривій AB.

Приклад 7. Знайти масу дуги кривої

$$\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t, \\ y = e^t \cdot \sin t, \\ z = e^t, \end{cases}$$

густина якої змінюється за законом $r=2z$.

Розв'язання. Оскільки

$$m = \int_L \gamma(x,y,z)dl,$$

то маса, яку потрібно знайти

$$m = \int_L 2zdl$$

в точках конічної гвинтової лінії. Параметр t змінюється від 0 до 2π.

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt,$$

$$x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t, \quad y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t, \quad z'(t) = e^t.$$

Тоді

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{e^{2t}(2\cos^2 t - 2\sin t \cos t + 2\sin^2 t + 2\sin t \cos t + 1)} = \sqrt{3}e^t,$$

або $dl = \sqrt{3}e^t dt$.

Обчислюємо

$$m=\int_{AB}2zdl=2\sqrt{3}\int_0^{2\pi}e^{2t}dt=\sqrt{3}e^{2t}\Big|_0^{2\pi}=\sqrt{3}\text{ (од. маси).}$$

Приклад 8. Знайти масу m, що розподілена з густиною $f(x,y)=y\sin x$ на верхній половині кола $x^2+y^2=\dfrac{\pi^2}{4}$.

Розв'язання. Використовуючи фізичне значення інтеграла по області, маємо:

$$m=\int_L \gamma(x,y,z)dl.$$

Рівняння дуги *AB* (заданого півкола) можна записати у явному вигляді

$$y=\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2},\quad 0\le x\le\pi.$$

Одержимо:

$$m=\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2}\sin x\frac{\pi dx}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2}}=\frac{\pi}{2}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\pi\text{ (одиниць вимірювання).}$$

Приклад 9. Обчислити роботу *A* сили $\vec{F}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$, яку вона здійснює на шляху, що з'єднує точки $A(1;1;1)$ до $B(2;3;4)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді $x=1+t,\quad y=1+2t,\quad z=1+3t.$ Відрізку AB відповідають значення параметра $0\le t\le 1.$ Отримуємо

$$\int_L yzdx+xzdy+xydz=\int_0^1\big((1+2t)(1+3t)+(1+t)(1+3t)\cdot 2+(1+t)(1+2t)\cdot 3\big)dt=$$

$$=\int_0^1(18t^2+22t+6)dt=23.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається криволінійним інтегралом першого роду? У чому полягає його геометричний і фізичний зміст?

2. Як обчислюється криволінійний інтеграл першого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння контура інтегрування задано у параметричній формі?

3. Як вичислюється криволінійний інтеграл першого роду, якщо рівняння лінії інтегрування задано у вигляді $y=y(x),\ x\in[a,b]$?

4. Як з допомогою криволінійного інтеграла першого роду обчислити площу циліндричної поверхні та знайти довжину дуги?

5. Як з допомогою криволінійного інтеграла першого роду знайти центр маси та моменти інерції матеріальної кривої відносно осей координат?

6. Що називається криволінійним інтегралом другого роду? У чому полягає його фізичний зміст?

7. Як обчислюється криволінійний інтеграл другого роду за допомогою визначеного інтеграла?

8. Як з допомогою криволінійного інтеграла другого роду обчислити площу плоскої фігури?

9. Як обчислити роботу змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж заданої кривої?

10. У чому полягає зв'язок між криволінійними інтегралами першого та другого родів?

11. Записати Формулу Гріна.

Навчальні завдання

110. Обчислити криволінійні інтеграли першого роду:

а) $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, де L – відрізок прямої $y=\frac{1}{2}x-2$ між точками $A(0, -2)$ та $B(4, 0)$;

б) $\int\limits_L xydl$, де L – сторони прямокутника з вершинами $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$, $D(0, 2)$;

в) $\int\limits_L (x^2+y^2)dl$, де L – коло: $x = a\cos t, \quad y = a\sin t.$

г) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де L – відрізок прямої від точки (0,0) до точки (1,2).

д) $\int\limits_L \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, де L– дуга кривої $x = t\cos t, \ y=t\sin t, \quad z=t, \quad 0\le t\le 2\pi$.

111. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду:

а) $\int\limits_L (x^2-2y)dx+(2xy+y^2)dy$, де де L – дуга параболи $y=x^2$ від точки A(1;1) до B(2;4);

б) $\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$, де L – відрізок прямої між точками A(1;1;1) і B(2;3;4);

в) $\int\limits_L xydx+xzdy+xydz$, де L – дуга гвинтової лінії $x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad z=\frac{at}{2\pi}$ від точки перетину лінії з площиною $z = a$.

г) $\int\limits_L xydx+y^2dy,$ де L – контур, утворений лініями $y=x^2, \quad y=4, \quad x=0.$

112. Обчислити криволінійні інтеграли за формулою Гріна:

а) $\oint\limits_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy,$ – де L контур трикутника з вершинами в точках (1,1), (2,2), (1,3).

б) $\oint\limits_L \frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy,$ де L – коло $(x-1)^2+(y-1)^2=4.$

113 Знайти масу чверті еліпса $x = a\cos t$, $y=b\sin t$, що розташована в першому квадранті, якщо густина маси в кожній точці дорівнює ординаті цієї точки.

114. Обчислити роботу сили $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$, яку вона здійснює на шляху, що з'єднує точки $A(0;0)$ до $B(2;1)$.

Завдання для самостійної роботи

115. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду:

$a)$ $\int\limits_L \frac{x+2y}{\sqrt{1+9x^4}}dl$, де L – дуга кривої $y = x^3$ при $0 \le x \le 2$.

$б)$ $\int\limits_L \frac{x^2}{64}dl$, де L – чверть кола $x^2 + y^2 = 64$ при $x \le 0, y \ge 0$.

$в)$ $\int\limits_L \frac{x^2 y}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dl$, де L – дуга синусоїди $y = \sin x$ при $0 \le x \le \pi$

116. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду:

$a)$ $\int\limits_L \frac{dx-dy}{\sqrt{xy}}$, , де L – відрізок прямої $x + y = 1$ при $0 \le x \le 1$.

$б)$ $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, , де L – дуга параболи $y = 1 - x^2$ від точки A(–1; 0) до точки B(1; 0).

$в)$ $\int\limits_L y^2dx + xydy$, де L – контур трикутника $O(0; 0)$, $A(1; 3)$, $B(3; 1)$ (обхід здійснюється проти руху стрілки годинника).

$г)$ $\int\limits_L 2xydx - x^2dy$, де L – дуга першої арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, причому рух здійснюється в напрямі зростання параметра t.

117. Знайти масу дуги кривої $x = 2t$, $y = \frac{1}{t^2}$; $z = \frac{2}{3t^3}$; $(0 \le t \le 1)$, густина якої змінюється за законом $r = \sqrt{y}$.

118. Дано точки A(-2,0) і B(0,2). Визначити роботу силу $\vec{F}(4,2)$.

Ідивідуальні завдання для самостійної роботи студентів по модулю «Функції декількох змінних»

1. Знайти частинні похідні функцій:

1) а) $z = x^3 + 3x^2y - y^2$; б) $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$;

2) а) $z = \ln(x^2 + y^2)$; б) $u = xy^2z^3$;

3) а) $z = \frac{y}{x}$; б) $u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy}$;

4) а) $z = arctg\frac{y}{x}$; б) $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

5) а) $z = \frac{xy}{x-y}$; б) $u = xy + yz + zx$;

6) а) $z = xe^{-xy}$; б) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

7) а) $z = \frac{2x-y}{x+2y}$; б) $u = x^3 + yz^2 + 3xy - x + z$;

8) а) $z = x^3 + 6xy^2 - 4y^3 - 2xy$; б) $u = \sin(x^2+y^2+z^2)$;

9) а) $z = x^2 - 3y^2 + 5xy$; б) $u = \ln(\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z})$;

10) а) $z = \frac{x}{y}$; б) $u = x^{\frac{y}{z}}$;

11) а) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$; б) $u = \frac{z}{x^2+y^2}$;

12) а) $z = \frac{5x-y}{x+5y}$; б) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$;

13) а) $z = y^x$; б) $u = x^2 y \sin z$;

14) а) $z = x^{y^2}$; б) $u = x^2 e^y \ln z$;

15) а) $z = e^{-\frac{y}{x}}$; б) $u = tg(3x-y) + 5^{y+z}$;

16) а) $z = x^4 \cos^2 y$; б) $u = \frac{y}{x} - 2\frac{z}{y}$;

17) а) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; б) $u = zx + x^3 yz + 3x^2 y - zy^2$;

18) а) $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$; б) $u = \mathrm{z}\ln(x^2+y^2-z)$;

19) а) $z = x^3 y - y^3 x$; б) $u = z^5 x - x^4 \cos^2 y$;

20) а) $z = (5x^2 y - y^3 + 7)^3$; б) $u = \frac{5x-z}{x+zy}$;

21) а) $z = \ln(x + \ln y)$; б) $u = \frac{x}{\sqrt{z^2+y^2}}$;

22) а) $z = xy\ln(x+y)$; б) $u = z\sqrt{x^2 - y^2}$;

23) а) $z = x^{xy}$; б) $u = \sin(x^3 + y^2 - 5z)$;

24) а) $z = \sin(xy)\cos(xy)$; б) $u = z\lg(x^2 - 5xyz)$;

25) а) $z = 5^{\frac{y}{x}}$; б) $u = (5x^2z - y^3 + 7z - 3x + 8)^4$;

26) а) $z = e^x \cos y$; б) $u = \arcsin(x^2y - 5z)$;

27) а) $z = (x^2 + y^2)^3$; б) $u = z^x + \lg(x^2 - 5xy)$;

28) а) $z = \sin(x^3 + y^2)$; б) $u = xz^5 - 7^{\frac{y}{x}}$;

29) а) $z = \arcsin(2x - 3y)$; б) $u = z^7 e^x \cos y$;

30) а) $z = \lg(x^2 - 5xy)$; б) $u = \dfrac{zy}{x^2 - zy}$.

2. Знайти градієнт функції у точці:

1) $z = 4 - x^2 - y^2$, $(1;\ 2)$;

2) $z = arctg\dfrac{y}{x}$, $(1;\ 1)$;

3) $z = xarctg\dfrac{x}{y}$, $(1;\ 1)$;

4) $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$, $(-1;\ 2)$;

5) $z = \dfrac{x + 2y}{x^2 - y^2}$, $(2;\ 1)$;

6) $z = \left(x^2 - 3y + y^2\right)e^x$, $(0;\ 1)$;

7) $z = \ln x\left(3 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}\right)$, $(2;\ 3)$;

8) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x - y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x + y}}$, $(5;\ 4)$;

9) $z = \dfrac{\sin xy}{2x}$, $\left(\dfrac{\pi}{4};1\right)$;

10) $z = e^{x + y^2}$, $(0;\ -1)$;

11) $z = arctg\dfrac{y}{x}$, $(1;-1)$;

12) $z = \dfrac{1}{\sin x\cos y}$, $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$;

13) $z = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}$, $(-4;\ 3)$;

14) $z = \dfrac{x + 1}{x^2 + y^2 - 1}$, $(1;\ -1)$;

15) $z = \ln\left(x^2 - 5y^2\right)$, $(7;\ -3)$;

16) $z = 2arctg\left(x^2y\right)$, $(1;\ 3)$;

17) $z = \left(2^x + x^2y\right)e^x$, $(0;\ -1)$;

18) $z = x\sin\left(2x - y + \dfrac{\pi}{6}\right)$, $(3;\ 6)$;

19) $z = \arccos\left(x\sqrt{y}\right)$, $(-3;\ 1)$;

20) $z = \ln\left(x^2 - 5y^2\right)$, $(7;\ -3)$;

21) $z=\frac{x^3}{x^2+y^2}$, $(1;\ 3)$;

22) $z=arctg\frac{y}{x}$, $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$;

23) $z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$, $\left(\frac{1}{9};\ 3\pi\right)$;

24) $z=x\,e^{-yx}$, $\left(2;\ -\frac{1}{2}\right)$;

25) $z=13\ln\left(x^3y^2+1\right)$, $(1;\ -1)$;

26) $u=x^2+y^2+z^2$, $(2;\ -2;\ 6)$;

27) $z=arctg\frac{y}{x}$, $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$;

28) $u=arctg\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(3;\ 4;\ -5)$;

29) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $(-3;\ 0;\ 4)$;

30) $z=\left(x^2-y\right)\ln(2x-y)$, $(2;\ 3)$.

3. Дослідити на екстремум функцію:

1) $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$;

2) $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$;

3) $z=e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$;

4) $z=\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}$;

5) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$;

6) $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$;

7) $z=x^3+3xy^2-15x-12y$;

8) $z=x^3-3xy+y^3$;

9) $z=2x^3+2y^2-36xy+30$;

10) $z=x^2+xy+y^2+2x-2y+7$;

11) $z=x^4+y^4-2x^2-4xy-2y^2$;

12) $z=4x-4y-x^2-y^2$;

13) $z=2x^2+y^2-8x+26$;

14) $z=2xy-3x^2-2y^2+27$;

15) $z=xy(1-x-y)$;

16) $z=x^3-6xy+y^2-39x+18y+20$;

17) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$;

18) $z=2x^2-3y^2+4x+6y+3$;

19) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$;

20) $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$;

21) $z=x^3+6xy+8y^3-1$;

22) $z=2xy-2x-6y+5$;

23) $z=x^3-6xy+8y^3+1$;

24) $z=x^3+xy^2+6xy$;

25) $z=x^2+xy+2y^2-x+y$;

26) $z=-x^2-4y^2+5x-8y+3$;

27) $z=x^4+2y^4+3$;

28) $z=3x^2-y^2+4y+5$;

29) $z=x^2+y^2-8x-2$;

30) $z=e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2\right)$.

4. Перейти від подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ до повторного, де S – область обмежена лініями:

1) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$;

2) $\begin{cases} xy\ge 6, \\ x+y\le 7; \end{cases}$

3) $x+y\le 1,\ \ x-y\le 1,\ \ x\ge 0;$

4) $x^2+y^2\le 1,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0;$

5) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1;$

6) $y=\frac{7}{x},\ \ x+y=8;$

7) $x\ge 0;\ y=2x+1,\ \ x+y=6;$

8) $y\ge x^2,\ \ y\le 4-x^2;$

9) $x=0,\ \ y=1,\ \ x-y+6=0;$

10) $y=x,\ \ y=2x,\ \ x+y=6;$

11) $x^2+y^2\le 4,\ \ x\ge 0;\ y\le 0;$

12) $y\ge x^2-2,\ \ y\le 6-x^2;$

13) $y=\frac{6}{x},\ \ x+y=-7;$

14) $x=0,\ \ x-y-2=0,\ x+y-2=0;$

15) $\frac{x^2}{9}+y^2\le 1,\ \ x\ge 0;\ y\ge 0;$

16) $y=\sqrt{x},\ \ y=\frac{1}{3}x;$

17) $y=-x^2,\ \ y=-4;$

18) $y=\sqrt{25-x^2},\ \ y=\frac{3}{4}x;$

19) $x=0,\ \ y=0,\ \ x+y=2;$

20) $x^2+y^2\le 9,\ \ x\le 0;\ y\ge 0;$

21) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}\le 1;$

22) $y=-\frac{6}{x},\ \ y=x+7;$

23) $y=\frac{4}{x},\ \ y=\frac{1}{2}x^2,\ \ y=8;$

24) $x+y=1,\ \ x-y=1,\ \ x=0;$

25) $y=-x^2+9,\ \ y=0;$

26) $y=x^3,\ y=7-x^2,\ \ x=0;$

27) $x^2+y^2\le 1,\ \ x\le 0;\ y\le 0;$

28) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1;$

29) $y=x^3,\ \ y=2x+5,\ \ x=0;$

30) $x\ge 0;\ y=4x+2,\ \ x+y=4.$

5. Обчислити подвійний інтеграл по області D, якщо D – прямокутник :

1) $\iint_D (x-y)dxdy,\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2;$

2) $\iint_D \sqrt{xy}dxdy,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1;$

3) $\iint_D \sqrt{x-y}dxdy,\ 2\le x\le 3,\ 1\le y\le 2;$

4) $\iint_D (x^2-y)dxdy,\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1;$

5) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy,\ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 6;$

6) $\iint_D (x+y^2)dxdy,\ 0\le x\le 6,\ 0\le y\le 6;$

7) $\iint_D (xy^2)dxdy,\ -1\le x\le 1,\ 0\le y\le 3;$

8) $\iint_D (x^2y)dxdy,\ -2\le x\le 2,\ 0\le y\le 4;$

9) $\iint_D (2x+1)y^2dxdy,\ 0\le x\le 1, -2\le y\le 3$

10) $\iint_D (5x^2y-3y)dxdy, 0\le x\le 3, 0\le y\le 2;$

11) $\iint\limits_D (x\sqrt{y}-x^2)dxdy,\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 4;$

12) $\iint\limits_D \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)dxdy,\ 1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2;$

13) $\iint\limits_D (xe^y-y^2)dxdy,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1;$

14) $\iint\limits_D (x\sqrt{x}+2y)dxdy,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 4;$

15) $\iint\limits_D (xe^{x+y})dxdy,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1;$

16) $\iint\limits_D x^2\sqrt{2y+1}dxdy,\ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 4;$

17) $\iint\limits_D \cos xe^y dxdy,\ 0\le x\le \frac{\pi}{4},\ 0\le y\le 1;$

18) $\iint\limits_D e^x(1+2y)dxdy,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 3;$

19) $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy,\ 0\le x\le \frac{\pi}{4}, 0\le y\le \frac{\pi}{4};$

20) $\iint\limits_D (6x^2+4x)\sqrt{y}dxdy, 0\le x\le 1, 4\le y\le 9;$

21) $\iint\limits_D (x+y+1)dxdy, 0\le x\le 1, 0\le y\le 2;$

22) $\iint\limits_D xydxdy, 0\le x\le 1, 0\le y\le 2;$

23) $\iint\limits_D (2x^2+y)dxdy, 0\le x\le 2, 0\le y\le 1;$

24) $\iint\limits_D (x^2-3y^2)dxdy,\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1;$

25) $\iint\limits_D (x^2-4y)dxdy,\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4;$

26) $\iint\limits_D (2x^2+5y)dxdy,\ 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1;$

27) $\iint\limits_D (\sqrt{x}+y^2)dxdy,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 4;$

28) $\iint\limits_D (xy^2)dxdy,\ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 1;$

29) $\iint\limits_D (\sqrt{x}y^3)dxdy,\ 0\le x\le 4,\ 0\le y\le 2;$

30) $\iint\limits_D (\frac{x}{y}+y^2)dxdy,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1;$

6. Перейти до нових або полярних координат і обчислити інтеграли:

1. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,$ D – круг $x^2+y^2\le R^2.$

2. $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy,$ верхнє півкільце між колами з радіусами e і e^2 і центром у початку координат.

3. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,$ D – круг $x^2+y^2\le 1.$

4. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,$ D – круг $x^2+y^2\le 2ax.$

5. $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,$ D – круг $x^2+y^2\le ax.$

6. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,$ D – круг $x^2+(y+2)^2\le 4.$

7. $\iint\limits_D ydxdy,$ верхній півкруг радіуса R з центром в точці (R, 0).

8. $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy,$ D – частина кільця $1\le x^2+y^2\le 9,\qquad \frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le x\sqrt{3}.$

9. $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ D – пелюстка лемніскати $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad (x\ge 0).$

10. $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy,$ D – круг $x^2+y^2\le Ry.$

11. $\iint\limits_D (h-2x-3y)dxdy,$ D – круг $x^2+y^2\le R^2.$

12. $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy,$ D – круг $x^2+y^2\le Rx.$

13. $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy,$ D – частина кільця $1\le x^2+y^2\le 4,\qquad \frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le x\sqrt{3}.$

14. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,$ D – пелюстка лемніскати Бернуллі $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad (x\ge 0).$

15. $\iint\limits_D ydxdy,$ D – область, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ що лежить у 1-й чверті.

16. $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy,$ D – круг $x^2+y^2\le R^2.$

17. $\iint\limits_D (x^2+y^2)^4dxdy,$ D – круг $x^2+y^2\le Rx.$

18. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ D – область, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,$ що лежить у 1-й чверті.

19. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ D – область, обмежена колами $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x.$

20. $\iint\limits_D (1-x^2-y^2)^5dxdy,$ D – область, обмежена колом $x^2+y^2=1,$ що лежить у 1-й чверті.

21. $\iint\limits_D (1+x^2+y^2)^3dxdy,$ D – область, обмежена колом $x^2+y^2=1,$ що лежить над віссю *Ox*.

22. $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy,$ D – область, визначається нерівностями $1\le x^2+y^2\le 4.$

23. $\iint\limits_D ydxdy,$ D – область, обмежена колом $x^2+y^2=1,$ що лежить у 1-й чверті.

24. $\iint\limits_D (6-2x-3y)dxdy,$ D – круг $x^2+y^2\le 9.$

25. $\iint_D (x^2+y^2)dxdy,$ D – круг $(x-4)^2+(y+2)^2 \le 4.$

26. $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy,$ D – круг $x^2+y^2 \le 2.$

27. $\iint_D (x^2+y^2)^4\,dxdy,$ D – круг $x^2+y^2 \le 2x.$

28. $\iint_D (1-2x-3y)dxdy,$ D – круг $x^2+y^2 \le 4.$

29. $\iint_D ydxdy,$ верхній півкруг радіуса R= 2 з центром в точці (2, 0).

30. $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy,$ D – круг $x^2+y^2 \le 2x.$

7. Обчислити потрійний інтеграл.

1. $\iiint_G (x+y+z)dxdydz,$ G – область, обмежена площинами $x+y+z=a, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

2. $\iiint_G xyzdxdydz,$ G – область, обмежена поверхнями $y=x^2, \quad z=xy, \quad y=0, \quad z=0.$

3. $\iiint_G y\cos(x+z)dxdydz,$ G – область, обмежена циліндром $y=\sqrt{x}$ і площинами $x+z=\dfrac{\pi}{2} \quad y=0, \quad z=0.$

4. $\iiint_G xdxdydz,$ G – область, обмежена циліндром $x^2+y^2=1$ і площинами $z=3, \quad z=0.$

5. $\iiint_G (x^2+y^2)dxdydz,$ G – куб, $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1.$

6. $\iiint_G (x+yz)dxdydz,$ G – прямокутний паралелепіпед $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 2.$

7. $\iiint_G (x-y)dxdydz,$ G – піраміда, утворена площинами $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y+z=1.$

8. $\iiint_G (x^2+y^2+z^2)dxdydz,$ G – прямокутний паралелепіпед $0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b, \quad 0 \le z \le c.$

9. $\iiint_G (1-y)dxdydz,$ область, обмежена площинами $z=1-x-y, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

10. $\iiint\limits_G xyzdxdydz,$ G – область, обмежена поверхнями $x^2+y^2+z^2=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

11. $\iiint\limits_G zdxdydz,$ G – область, обмежена поверхнями $z=1, \quad z=x^2+y^2.$

12. $\iiint\limits_G zdxdydz,$ G – область, що визначається нерівностями

$0 \le x \le \frac{1}{2}, \quad x \le y \le 2x, \quad 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}.$

13. $\iiint\limits_G (2x+3y-z)dxdydz,$ обмежена площинами

$z=a, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, x+y=b, (a \ge 0, b \ge 0).$

14. $\iiint\limits_G (x+y+1)dxdydz,$ G –область, обмежена поверхнями $x^2+y^2=z, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=1.$

15. $\iiint\limits_G xy^2z^3dxdydz,$ G – область, обмежена поверхнями $z=xy, \quad x=1, \quad y=x, \quad z=0.$

16. $\iiint\limits_G (1-y)dxdydz,$ G – область, що задовольняє умови $2az \ge x^2+y^2, \quad x^2+y^2+z^2 \le 3a^2.$

17. $\iiint\limits_G z^2dxdydz,$ G – область, що задовольняє умови

$2Rz \ge x^2+y^2+z^2, \quad x^2+y^2+z^2 \le R^2.$

18. $\iiint\limits_G xyzdxdydz,$ G – область, що обмежена площиною $z=0$ і верхньою половиною еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

19. $\iiint\limits_G \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz,$ G – область, що обмежена еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

20. $\iiint\limits_G xydxdydz,$ G – область, обмежена циліндром $x^2+y^2=1$ і площинами $z=3, \quad z=0.$

21. $\iiint\limits_G (x+y^2+1)dxdydz,$ G – область, обмежена поверхнями

$x^2+y^2=z, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=1.$

22. $\iiint\limits_G (1-y)dxdydz,$ G – область, що задовольняє умови

$2 \ge x^2+y^2, \quad x^2+y^2+z^2 \le 3.$

23. $\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)dxdydz,$ G – прямокутний паралелепіпед

$0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 6, \quad 0 \le z \le 8.$

24. $\iiint\limits_G (3x+3y-2z)dxdydz,$ обмежена площинами

$z=3, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, x+y=2.$

25. $\iiint\limits_G y\sin(x+z)dxdydz,$ G – область, обмежена циліндром $y=\sqrt{x}$ і площинами

$x+z=\dfrac{\pi}{2} \quad y=0, \quad z=0.$

26. $\iiint\limits_G (1-x)dxdydz,$ G – область, що задовольняє умови

$2 \ge x^2+y^2, \quad x^2+y^2+z^2 \le 3.$

27. $\iiint\limits_G xyzdxdydz,$ G – область, що обмежена площиною $z=0$ і верхньою половиною

еліпсоїда $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{1}=1.$

28. $\iiint\limits_G (2x+3y-z)dxdydz,$ обмежена площинами

$z=2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, x+y=b, (a \ge 0, b \ge 0).$

29. $\iiint\limits_G x^2yzdxdydz,$ G – область, обмежена поверхнями

$x^2+y^2+z^2=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

30. $\iiint\limits_G (x^2+y^2)dxdydz,$ G – куб, $0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 2, \quad 0 \le z \le 2.$

Завдання 8

1. Обчислити центр ваги сегмента еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, обмеженого прямою $3x+2y=6$.
2. Користуючись потрійним інтегралом, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=4-y^2, \quad z=y^2+2, \quad x=-1, x=2.$.
3. Обчислити центр ваги фігури, обмеженої віссю Ox і параболою $y=2x-3x^2$.
4. Обчислити центр ваги плоского сегмента параболи $y^2=4x$, який відрізає пряма $x=4$.
5. Користуючись потрійним інтегралом, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=x^2+y^2, \quad z=x^2+2y^2, \quad y=x, y=2x$.
6. Обчислити центр ваги фігури, обмеженої параболами $y^2=2x$, $x^2=2y$.

7. Обчислити центр ваги плоскої фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x, \quad y = x$.

8. Обчислити центр ваги плоскої фігури обмеженої лініями $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $(x > 0, y > 0)$.

9. Знайти момент інерції I_0 відносно початку координат сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

10. Обчислити момент інерції відносно початку координат, фігури, обмеженої лініями $x^2 = 4y, \quad x = 2, \quad y = 0$.

11. Обчислити момент інерції I відносно оси Ox фігури, обмеженої лініями $xy = 4, \quad x = 1, \quad y = 1.$

12. Знайти момент інерції відносно осі Oy плоскої фігури, обмеженої лініями: $xy = 9, \quad x = 1, \quad y = 1.$

13. Користуючись потрійним інтегралом, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z^2$, $x + y = \frac{1}{3z^2}$ (об'єм тіла між конусами).

14. Обчислити центр ваги тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 4$, $x + y = 2, z = 4.$

15. Знайти центр ваги тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = z, \quad z = 9$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0.$

16. Обчислити центр ваги сегмента еліпса, обмеженого прямою: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad 3x + 2y = 6.$

17. Знайти момент інерції плоскої фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x, \quad y = x.$

18. Знайти центр ваги фігури, обмеженої лініями $y^2 = x, \quad y^2 = 6 - x.$

19. Знайти масу тіла, що лежить між сферами $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *і* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, якщо густина в кожній його точці обернено пропорційна віддалі до початку координат (k – коефіцієнт пропорційності).

20. Знайти центр ваги однорідного тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = z, \quad z = 9, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$

21. Знайти момент інерції I_y плоского тіла, обмеженого еліпсом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$

22. Знайти центр ваги сегмента, обмеженого еліпсом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ і прямою $4x + 3y = 12$.

23. Обчислити центр ваги фігури, обмеженої віссю Oy і параболою $y^2 = 3 + x.$

24. Користуючись потрійним інтегралом, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 3, \quad z = 1.$

25. Користуючись подвійним інтегралом, обчислити площу фігури, обмежену лініями $x^2 + y^2 = 2x, \quad y = x$ (площу меншої фігури).

26. Обчислити центр ваги сегмента еліпса, обмеженого прямою: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad x + 2y = 6.$

27. Знайти момент інерції плоскої фігури, обмеженої лініями $y^2 = x, \quad y = x.$

28. Знайти центр ваги фігури, обмеженої лініями $y = x^2, \quad y = 6 - x^2.$

29. Обчислити момент інерції плоскої фігури обмеженої лініями $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $(x > 0, y > 0)$.

30. Обчислити момент інерції плоскої фігури, обмеженої віссю Ox і параболою $y = 2x - 3x^2$.

9. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду:

1. $\int\limits_C \frac{xy}{\sqrt{1+4x}} dS$, де С – дуга кривої $y = 1 - \sqrt{x}$ при $1 \le x \le 25$.

2. $\int\limits_C \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, де С – відрізок прямої, що з'єднує точки 0(0; 0) і А(1; 2).

3. $\int\limits_C y^2 dS$, де С – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

4. $\int\limits_C y\sqrt{1+x} dS$, де С – дуга кривої $y = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$ між точками з абсцисами $x_1 = 0$ і $x_2 = 9$.

5. $\int\limits_C (x + y) dS$, де С – відрізок прямої $y = 2x - 1$ при $-1 \le x \le 2$.

6. $\int\limits_C x dS$, де С – дуга параболи $y = \frac{1}{2} x^2$ при $0 \le x \le 6$.

7. $\int\limits_C x^2 y^2 dS$, де С – коло $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

8. $\int\limits_C arctg \frac{y}{x} dS$, де С – дуга кардіоїди $r = a(1 + \cos t)$ при $0 \le t \le 2\pi$.

9. $\int\limits_C x^2 dS$, де С – дуга півкубічної параболи $y = x\sqrt{x}$ при $1 \le x \le 4$.

10. $\int\limits_C x dS$, де С – півколо $x^2 + y^2 = 4$, $y \ge 0$.

11. $\int\limits_C y dS$, де С – півколо $x^2 + y^2 = 9$, $x \ge 0$.

12. $\int\limits_C \frac{1}{25} y^2 dS$, де С – чверть кола $x^2 + y^2 = 25$, що знаходиться у першому координатному куті.

13. $\int\limits_C (2x+3y)dS$, де C – дуга параболи $y = 2\sqrt{x}$ при $1 \le x \le 36$.

14. $\int\limits_C \sqrt{1+y^2}dS$, де C – дуга кривої $y = e^x$ при $0 \le x \le 1$.

15. $\int\limits_C \frac{xy}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dS$, де C – дуга косинусоїди $y = \cos x$ при $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

16. $\int\limits_C y^2 dS$, де C – половина арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le \pi$

17. $\int\limits_C y\sqrt{36+x^4}dS$, де C – дуга кривої $xy = 6$ при $1 \le x \le 3$.

18. $\int\limits_C x^3 y\sqrt{1+x^2}dS$, де C – дуга кривої $y = \ln x$ при $1 \le x \le e$.

19. $\int\limits_C \frac{xy}{\sqrt{1+e^{2x}}}dS$, де C – дуга кривої $y = e^x$ при $0 \le x \le 1$.

20. $\int\limits_C \sqrt{1+4e^{2x}}dS$, де C – дуга кривої $y = e^{2x}$ при $-1 \le x \le 0$.

21. $\int\limits_C \frac{x^5 y}{\sqrt{1+x^2}}dS$, де C – дуга кривої $y = \ln x$ при $1 \le x \le \sqrt{e}$.

22. $\int\limits_C xdS$, де C – дуга кривої $y = \frac{1}{x}$ при $1 \le x \le \sqrt{3}$.

23. $\int\limits_C \frac{1}{64}x^2 dS$, де C – чверть кола $x^2 + y^2 = 64$ при $x \le 0, y \ge 0$.

24. $\int\limits_C \sqrt{1+\sin^2 2x}dS$, де C – дуга кривої $y = \sin^2 x$ при $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

25. $\int\limits_C \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{4+x^2}}dS$, де C – дуга кривої $y = 2\ln x$ при $1 \le x \le e^2$.

26. $\int\limits_C \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де C – відрізок прямої, що з'єднує точки 0(2; 1) і A(1; 2).

27. $\int\limits_C \frac{xy}{\sqrt{1+4x}}dS$, де C – дуга кривої $y = 1 - \sqrt{x}$ при $4 \le x \le 16$.

28. $2\int\limits_C (x+y)dS$, де C – відрізок прямої $y = 3x - 2$ при $-1 \le x \le 2$.

29. $\int\limits_C xdS$, де C – дуга параболи $y = \frac{1}{2}x^2$ при $1 \le x \le 4$

30. $\int\limits_C xdS$, де C – півколо $x^2 + y^2 = 9$, $y \geq 0$.

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду:

1. $\int\limits_L xy^2dx - x^2ydy$, де L – відрізок прямої $y = 2x + 1$ від точки (–1; –1) до точки (0; 1).

2. $\int\limits_L (2x+3y)dx + xdy$, де L – дуга кривої $y = 2x^2$ від точки (–1; 2) до точки (1; 2).

3. $\int\limits_L \ln ydx + x^5dy$, де L – дуга кривої $y = x^3$ від точки (1; 1) до точки (2; 8).

4. $\int\limits_L \frac{x}{y}dx + x^2dy$, де L – дуга кривої $y = x^4$ від точки (1; 1) до точки (2; 16).

5. $\int\limits_L x\sqrt{y}dx + (x+1)dy$, де L – дуга кривої $y = e^{2x}$ від точки (0; 1) до точки (1; e^2).

6. $\int\limits_L (x^2 + \sqrt{y})dx - 2xdy$, де L – відрізок прямої $2x + 3y = 12$ від точки (6; 0) до точки (0; 4).

7. $\int\limits_L (x-y)dx + 4xdy$, де L – дуга кривої $xy = 1$ від точки (1; 1) до точки (2; $\frac{1}{2}$).

8. $\int\limits_L 3ydx - 2xdy$, де L – дуга кривої $y = \arccos x$ від точки (0; $\frac{\pi}{2}$) до точки ($\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{3}$).

9. $\int\limits_L ydx + xdy$, де L – дуга кривої $y = \arcsin x$ від точки (0; 0) до точки (1; $\frac{\pi}{2}$).

10. $\int\limits_L (x^2 + y)dx - 3xydy$, де L – дуга кривої $y = x^3 - x^2$ від точки (0; 0) до точки (1; 0).

11. $\int\limits_L 2ydx + x^2dy$, де L – дуга параболи $y = -x^2 + 2x$ від точки (0; 0) до точки (2; 0).

12. $\int\limits_L y^3dx + x^3dy$, де L – дуга кривої $y = 2\sqrt[3]{x}$ від точки (–1; –2) до точки (0; 0).

13. $\int\limits_L \sqrt{x+y}dx - e^xdy$, де L – дуга кривої $y = x^2$ від точки (0; 0) до точки (1; 1).

14. $\int\limits_L ydx + 7xdy$, де L – дуга кривої $y = lnx$ від точки (1; 0) до точки (e; 1).

15. $\int\limits_L ydx - 2(x+y)dy$, де L – дуга кривої $y^2 = x$ від точки (0; 0) до точки (1; 1).

16. $\int\limits_L \cos ydx - 2x\sin ydy$, де L – відрізок прямої $y = 2x$ від точки (0; 0) до точки ($\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$).

17. $\int\limits_L 2xydx + x^2dy$, де L – дуга кривої $y = \sqrt[3]{x^2}$ від точки (0; 0) до точки (8; 4).

18. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + \frac{x}{y}dy$, де L – дуга кривої $xy = 4$ від точки (1; 4) до точки (4; 1).

19. $\int\limits_L \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy$, де L – дуга кривої $y = x^4$ від точки (1; 1) до точки (2; 16).

20. $\int\limits_L ydx + 4xdy$, де L – дуга кривої $y = arctgx$ від точки (0; 0) до точки (1; $\frac{\pi}{4}$).

21. $\int\limits_L xydx + xdy$, де L – дуга кривої $y = \sin x$ від точки (0; 0) до точки ($\frac{\pi}{2}$; 1).

22. $\int\limits_L y^2dx - \sqrt{x}dy$, де L – дуга кривої $y = \sqrt{x}$ від точки (0; 0) до точки (9; 3).

23. $\oint\limits_L y^2dx - xydy$, де L – контур трикутника O(0; 0), A(1; 3), B(3; 1) (обхід здійснюється проти руху стрілки годинника).

24. $\int\limits_L 2ydx + xdy$, де L – дуга кривої $y = \frac{6}{x}$ від точки (1; 6) до точки (6; 1).

25. $\int\limits_L (x+y)dx - dy$, де L – дуга кривої $y = e^x$ від точки (0; 1) до точки (1; *e*).

26. $\int\limits_L (x^2 + \sqrt{y})dx - 2xdy$, де L – відрізок прямої $x + 3y = 12$ від точки (6; 2) до точки (0; 4).

27. $\int\limits_L (x-y)dx + 4xdy$, де L – дуга кривої $xy = 1$ від точки (1; 1) до точки ($\frac{1}{2}$;4).

28. $\int\limits_L y^3dx + x^3dy$, де L – дуга кривої $y = 2\sqrt[3]{x}$ від точки (0; 0) до точки (1; 2).

29. $\int\limits_L ydx - 2(x+y)dy$, де L – дуга кривої $y = x^2$ від точки (0; 0) до точки (2; 4).

30. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + \frac{x}{y}dy$, де L – дуга кривої $xy = 4$ від точки (-1; -4) до точки (-4; -1).

Глава 10
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

§ 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Загальні поняття

У математиці та її застосуваннях доводиться розглядати рівняння, у яких невідомими є функції. Так, задача про знаходження шляху $S(t)$ за даною швидкістю зводиться до розв'язування рівняння $S'(t)=V(t)$. Наприклад. Якщо $V(t)=4t+8$, то для знаходження шляху необхідно розв'язати рівняння $S'(t)=4t+8$.

Диференціальним називають рівняння, в якому крім невідомої функції та її змінної (змінних) є також її похідні (частинні похідні).

Диференціальні рівняння називають *звичайними*, якщо невідома функція є функцією однієї змінної.

Диференціальні рівняння називають рівняннями *з частинними похідними,* якщо невідома функція є функцією двох, або більшого числа змінних.

Приклад 1. Диференціальними є такі рівняння:

а) $y''+y=x^2$; *б*) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$; *в*) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Рівняння *а*) є звичайним диференціальним рівнянням; а *б*) і *в*) – рівняннями з частинними похідними.

Надалі ми будемо розглядати лише звичайні диференціальні рівняння.

Порядком диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної, яка входить до цього рівняння.

В загальному, диференціальні рівняння *n-го* порядку можна записати у вигляді

$$F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0, \tag{1}$$

де x – незалежна змінна, y – невідома функція, $y', y'', \dots, y^{(n)}$ – її похідні.

Якщо рівняння (1) є диференціальним рівнянням *n-го* порядку, то функція F не обов′язково залежить від $x,y,y',...,y^{(n-1)}$, але обов′язково залежить від $y^{(n)}$.

Розв′язком диференціального рівняння (1) називають функцію, яка має похідні включно до n*-го* порядку і при підстановці якої в рівняння останнє перетворюється в тотожність.

Приклад 2. Знайти розв'язок диференціального рівняння $S'(t)=4t+8$.

Потрібно знайти таку функцію, похідна якої $4t+8$, тобто знайти первісну цієї функції. Звідси $S(t)=2t^2+8t+C$.

Графік розв′язку диференціального рівняння (1) називають *інтегральною кривою.*

Розв′язок диференціального рівняння (1), записаний в неявному вигляді $g(x,y)=0$, називають ***і****нтегралом* рівняння.

Якщо знайдено розв′язок, то до інтегралу перейти досить просто. Обернена задача іноді може бути нерозв′язною.

Розглянемо диференціальні рівняння першого порядку, які в загальному вигляді можна записати так :

$$F(x,y,y')=0 \tag{2}$$

Допустимо, що рівняння (2) можна розв′язати відносно похідної, тобто

$$y' = f(x;y) \tag{3}$$

Загальним розв′язком диференціального рівняння (2) або (3) називають однопараметричну сім′ю функцій $y = \varphi(x;\, C)$, які є розв′язками при будь-якому значенні сталої C з деякої множини і будь-який розв′язок представляється у вигляді $y = \varphi(x;\, C)$ при певному конкретному значенні сталої С.

Розв′язок, отриманий із загального при конкретному значенні сталої C, називають *частинним або окремим розв′язком*.

Загальний розв′язок диференціального рівняння (2) або (3), записаний у неявному вигляді $\Phi(x;\, y;\, C) = 0$, називають *загальним інтегралом* цього рівняння.

Для диференціальних рівнянь (2) або (3) розглядають ***задачу Коші***: серед розв′язків диференціального рівняння (2) або (3) знайти такий розв′язок $y = y(x)$, який задовольняє умові $y_0 = y(x_0)$. Фіксовані дійсні числа $(x_0;\, y_0)$ при цьому називають *початковими даними*, а умову $y_0 = y(x_0)$ – *початковою умовою* диференціального рівняння.

Звичайно виникає питання, чи має задача Коші розв′язки і якщо має, то скільки їх.

Якщо функція $f(x;y)$ є неперервною разом з частинною похідною $\frac{\partial f}{\partial y}$ в деякій області $D \in E_2$, то для будь-якої точки $(x_0;y_0)$ з цієї області існує єдиний розв′язок $y = \varphi(x)$ рівняння (3), визначений в деякому околі точки x_0, який задовольняє початковій умові $y_0=y(x_0)$.

З цієї теореми випливає, що при виконанні вказаних умов через кожну точку області D проходить одна і тільки одна інтегральна крива.

Приклад 3. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y' = \cos 2x$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 5$.

Розв'язком цього рівняння є функція $y = \frac{1}{2}\sin 2x + C$. Знайдемо конкретне значення C, виходячи із початкових умов. $5 = \frac{1}{2}\sin 0 + C \Rightarrow C = 5$. Тобто частинним розв'язком цього рівняння, який задовольняє початкові умови $y(0) = 5$ буде функція $y = \frac{1}{2}\sin 2x + 5$.

Приклад 4. Функція $y = Ce^x$ є загальним розв'язком диференціального рівняння $y' - y = 0$, оскільки $(Ce^x)' - Ce^x = Ce^x - Ce^x = 0$, і для будь-якої початкової умови (1.3) маємо $Ce^{x_0} = y_0$. Звідки $C = \frac{y_0}{e^{x_0}}$. Тому функція $y = \frac{y_0}{e^{x_0}}e^x$ задовольняє початковій умові.

1.2. *Рівняння з відокремлюваними змінними*

Рівняння $y' = f(x;y)$ називається *рівнянням з відокремлюваними змінними*, якщо має місце рівність $f(x,y) = \varphi(x)g(y)$.

Тобто, в цьому випадку $y' = \varphi(x)g(y)$. Якщо $g(y) \neq 0$, то $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = \varphi(x)dx$ – рівняння з відокремлюваними змінними.

Така ж рівність з точністю до сталої буде мати місце і після інтегрування:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int \varphi(x)dx .$$

Фактично ми отримали загальний інтеграл рівняння.

Зауваження. Якщо $g(y_1) = 0$, то розв′язком рівняння також буде $y=y_1$.

Приклад 5. Знайти загальний роз′язок диференціального рівняння $y'=x(y^2+1)$.

Розв′язання. $y' = \frac{dy}{dx}$, отже, $\frac{dy}{dx} = x(y^2+1) \Rightarrow \frac{dy}{y^2+1} = xdx$.

Отримали рівняння в якому змінні відокремлені. Проінтегруємо його:

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int xdx, \qquad arctgy = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

$y = tg\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$ – загальний розв′язок рівняння.

Приклад 6. Знайти загальний розв′язок диференціального рівняння $y' = x(y-1)$.

Розв′язання. $y' = x(y-1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(y-1) \Rightarrow \frac{dy}{y-1} = xdx.$

Отримали рівняння в якому змінні відокремлені. Проінтегруємо його:

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int xdx .$$

$$\ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + \ln C \Rightarrow y-1 = e^{\frac{1}{2}x^2+\ln C} \Rightarrow y-1 = C\cdot e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y = 1 + C\cdot e^{\frac{x^2}{2}} .$$

Розв′язком цього рівняння буде також y = 1, де цей розв′язок входить до держанного нами розв′язку $y = 1 + C\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ при C=0, тому отриманий нами розв′язок є загальним.

Зауваження. Диференціальне рівняння вигляду $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ називається *рівнянням, записаним в диференціальній формі*.

Рівняння $y' = f(x,y)$ завжди можна записати у такій формі. Дійсно:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow f(x,y)dx + (-1)dy = 0 .$$

Рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ буде рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо мають місце співвідношення:

$$M(x,y) = \varphi_1(x)g_1(y) \text{ і } N(x,y) = \varphi_2(x)g_2(y).$$

Приклад 7. Температура вийнятого з печі хліба протягом 10*хв*. зменшується від 125^0

до 90^0. Температура повітря у приміщенні 25^0. Через який час після початку охолодження температура хліба стане 50^0?

Розв'язання. Як відомо з фізики, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і середовища. Позначивши температуру хліба через T, а час t, одержимо диференціальне рівняння, яке описує процес охолодження:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-25).$$ (Мінус беремо бо тіло охолоджується).

Розв'яжемо це рівняння.

$$\frac{dT}{T-25} = -kdt \Rightarrow \int \frac{dT}{T-25} = -k\int dt \Rightarrow \ln|T-25| = -kt + C_1 \Rightarrow$$

$$T - 25 = e^{-kt+C_1} \Rightarrow T = C \cdot e^{-kt} + 25.$$

Виходячи із умови задачі знайдемо константу C та коефіцієнт k. При $t = 0$ температура була 125^0, отже $125 = C \cdot e^0 + 25 \Rightarrow C = 100$, отже $T = 100 \cdot e^{-kt} + 25$. За умовою $T(10) = 90$, тому

$$90 = 100 \cdot e^{-k \cdot 10} + 25 \Rightarrow e^{-10k} = 0.65 \Rightarrow k = -0.1 \cdot \ln 0.65 \Rightarrow k = 0.043.$$

Звідси маємо

$$T = 100 \cdot e^{-0.043t} + 25.$$

Розв'язування багатьох фізичних, біологічних, технічних та інших прикладних задач зводиться до розв'язування диференціального рівняння $y' = ky$, де *k*- задане число. Такі рівняння описують процеси, в яких швидкість зміни шуканої величини пропорційна її кількості.

Рівняння $y' = ky$ називають рівнянням показникового зростання.

Розв'яжемо його

$$\frac{dy}{dx} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = kdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = k\int dx \Rightarrow \ln|y| = kx + C \Rightarrow y = e^{kx+c} \Rightarrow y = Ce^{kx}.$$

Наприклад, у дослідах встановлено, що швидкість $m'(t)$ розмноження бактерій пов'язана з масою бактерій рівнянням $m'(t) = k \cdot m(t)$, тут *k* додатнє число, пов'язане із зовнішніми умовами та видом бактерій. Його розв'язком буде функція $m(t) = m_0 e^{kt}$. Іншим прикладом застосування цього рівняння є задача про радіоактивний розпад.

Приклад 8. Населення міста зростає зі швидкістю пропорційною його кількості. Зараз в місті проживає 900тисяч осіб і щорічно кількість збільшується на 30 тисяч. Через скільки років населення міста збільшиться вдвічі?

Розв'язання. Позначимо через x кількість населення (у тисячах) на час t (у роках). Оскільки швидкість зростання населення пропорційна його кількості, то

$$x' = kx \Rightarrow \frac{dx}{dt} = kx \Rightarrow \frac{dx}{x} = kdt \Rightarrow \ln|x| = kt + C \Rightarrow x = C \cdot e^{kt}.$$

Знайдемо *С* виходячи з даних задачі ($x(0) = 900$) маємо $900 = C \cdot e^0 \Rightarrow C = 900$. Тому рівняння зростання населення має вигляд $x = 900e^{kt}$.

Коефіцієнт k знайдемо із умови

$$x(1)=930 \quad 930=900e^{k} \Rightarrow e^{k}=\frac{930}{900} \Rightarrow k=\ln 1.03 \Rightarrow k=0.033.$$

Звідси

$$x=900e^{0.033t}.$$

Знайдемо час, через який кількість населення збільшиться вдвічі, тобто стане 1800 осіб.

$$1800=900e^{0.033t} \Rightarrow e^{0.033t}=2 \Rightarrow 0.033t=\ln 2 \Rightarrow t=\frac{\ln 2}{0.033}=21.$$

Приклад 9. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $M_0(-2;\ 5)$, якщо тангенс кута нахилу дотичної до неї у будь-якій точці $M(x;\ y)$ дорівнює абсцисі цієї точки.

Розв'язання. Нехай рівнянням шуканої кривої *l* буде $y=f(x)$. За умовою задачі $\operatorname{tg}\alpha=y'=x$, тобто одержали рівняння $y'=x$, яке містить похідну функції *y*, з якого знайдемо невідому поки що функцію $y=f(x)$ у такий спосіб:

$$y'=x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=x \Leftrightarrow dy=xdx \Leftrightarrow \int dy=\int xdx \Leftrightarrow y=\frac{x^2}{2}+C.$$

Розв'язком рівняння $y'=x$ виявилась однопараметрична сім'я парабол $y=\frac{x^2}{2}+C,$ з яких треба вибрати ту, яка проходить через точку $M_0(-2;\ 5)$. Підставимо координати цієї точки в рівняння:

$$M_0 \in l \Leftrightarrow 5=\frac{(-2)^2}{2}+C \Leftrightarrow C=3.$$

Отже, рівнянням шуканої кривої буде: $y=\frac{x^2}{2}+3.$

1.3. Однорідні рівняння

Функцію *f(x,y)* називають ***однорідною функцією виміру n***, якщо для будь-якого *t*, крім, можливо, *t* = 0 виконується рівність $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.

Приклад 10. Показати, що функція *f(x,y)* = $x^2 - xy$ однорідна .

Розв'язання. $f(tx,ty)=t^2x^2-txty \Rightarrow \quad f(tx,ty)=t^2\left(x^2-xy\right) \quad \Rightarrow \quad f(tx,ty)=t^2 f(x,y).$

Тобто дана функція однорідна другого виміру.

Приклад 11. Знайти вимір однорідної функції $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}.$

Розв'язання. $f(tx,ty)=\frac{(tx)^2+(ty)^2}{(tx)^2-(ty)^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=f(x,y).$

Це однорідна функція нульового виміру.

Диференціальне рівняння *y'=f(x,y)* називають *однорідним*, якщо функція *f(x,y)* є однорідною нульового виміру, тобто $f(tx,ty)=f(x,y)$.

Введемо заміну $y=u\cdot x$, де *u* = *u(x)* – невідома функція. Тоді $y'=u'x+u$.

Отже, $u'x+u=f(x,ux)$, або враховуючи однорідність функції *f(x,y)*,

$$u'x+u=f(tx,tux).$$

В якості t візьмемо $t=\dfrac{1}{x}$, тоді $u'x+u=f(1,u)$

Оскільки $f(1,u)$ функція однієї змінної u, то позначимо її як $\varphi(u)=f(1,u)$. В результаті такої заміни одержуємо рівняння, яке залежить від x і u:

$$u'x+u=\varphi(u).$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно

$$u'x=\varphi(u)-u \quad \Rightarrow x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши його $\displaystyle\int \frac{du}{\varphi(u)-u}=\int \frac{dx}{x}$ і виконавши підстановку $u=\dfrac{y}{x}$ одержимо загальний інтеграл даного рівняння.

Приклад 12. Розв'язати задачу Коші $y'=\dfrac{y}{x}\left(\ln\dfrac{y}{x}+1\right)$, $y(1)=e^5$.

Розв′язання. В даному випадку *f(x,y)* $=\dfrac{y}{x}\left(\ln\dfrac{y}{x}+1\right)$. Доведемо, що ця функція однорідна нульового виміру:

$$f(tx,ty)=\frac{ty}{tx}\left(\ln\frac{ty}{tx}+1\right)=\frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}+1\right)=f(x,y).$$

Отже, рівняння є однорідним. Робимо заміну $y=u\cdot x$, тоді $y'=u'x+u$. Після підстановки одержуємо

$$u'x+u=u(\ln u+1) \quad \Rightarrow \quad u'x=u(\ln u) \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx}=u\ln u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x}+C \quad \Rightarrow \ln(\ln u)=\ln x+\ln C \quad \Rightarrow \quad \ln u=Cx \quad \Rightarrow \quad u=e^{Cx}.$$

Оскільки $u=\dfrac{y}{x}$, то $y=x\cdot e^{Cx}$ – загальний розв′язок даного рівняння.

Знайдемо тепер частинний розв'язок рівняння, використовуючи початкові умови $y(1)=e^5$. Маємо $e^5=1\cdot e^C \Rightarrow C=5$. Тому частинним розв'язком даного рівняння буде функція $ó=õ\cdot å^{5õ}$.

Зауваження. Інколи на практиці зручно застосовувати заміну $x=u\cdot y$, де $u=u(y)$ – невідома функція.

Запитання для самоперевірки

1. Які рівняння називають диференціальними?
2. Що таке порядок диференціального рівняння?
3. Що називають розв′язком диференціального рівняння?
4. Що розуміють під інтегралом диференціального рівняння?
5. Сформулювати задачу Коші.
6. Сформулювати теорему про кількість розв′язків задачі Коші.

7. Що таке загальний розв′язок диференціального рівняння?

8. Які диференціальні рівняння називають рівняннями з відокремлюваними змінними?

9. Що таке однорідна функція?

10. Які диференціальні рівняння називають однорідними?

11. Яку заміну використовують при розв′язуванні однорідних диференціальних рівнянь?

Навчальні завдання

Визначте, чи будуть розв'язками наведених диференціальних рівнянь зазначені поряд функції:

120. $xy' = 2y;$ $\quad y = 5x^2.$ 121. $y'' = x^2 + y^2$; $\quad y = \dfrac{1}{x}.$

122. $y'' + y = 0;$ $\quad y = 3\sin x - 4\cos x.$ 123. $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y = 8e^{3x} + 5e^{2x}$.

124. $y''' + y'' = x^3 + x^2$, $\quad y = \dfrac{1}{20}x^5 - \dfrac{1}{6}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2$.

125. Для диференціального рівняння $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ встановіть, які із наведених нижче функцій будуть загальним чи частинним розв'язком:

а) $y = (x+2)^3$; *б)* $y = (x+c)^3$; *в)* $y = x^3$;

г) $y = 0$; *д)* $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$; *е)* $y = 2x^3$.

У задачах 126- 137 знайти загальний розв′язок диференціального рівняння.

126. $ydx + xdy = 0$ 127. $y^2dx + xdy = 0$ 128. $(y+2)dx + dy = 0$

129. $\sqrt{1-y^2}\cos xdx - 5dy = 0$ 130. $(y^2+9)dx - \cos^2 xdy = 0$

131. $x\sqrt{9-y^2}dx - y(4+x^2)dy = 0$ 132. $(xy^2 - y^2)dx - (x^2y + x^2)dy = 0$

134. $\cos x\cos ydx - \sin x\sin ydy = 0$ 135. $\sin \acute{o} + \sqrt{x^2-4}\cos y \cdot y' = 0$

136. $(y^3+1) + 2xy^2y' = 0$ 137. $4xy + (x^2+1)y' = 0$.

Перевірити чи являються рівняння 138 - 143 однорідними і розв'язати їх.

138. $y' = \dfrac{y^2}{xy - x^2}$ 139. $y' = \dfrac{2x^2 + xy - 2y^2}{x^2}$ 140. $x^2dy + y^2dx = xydx$

141. $(x+y)dx + 2xdy = 0$ 142. $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$ 143. $y' = \dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

Розв'язати задачу Коші для рівнянь 144- 147.

144. $xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$, $\quad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 145. $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$, $\quad y(1) = \sqrt{2}$

146. $x^2y' = y^2 + xy$, $\quad y(1) = \dfrac{1}{11}$; 147. $x^3y' = y(y^2 + x^2)$, $\quad y(2) = 1$;

148. Знати рівняння кривої, що проходить через точку *A(* 1; $\frac{\pi}{2}$*)* і для якої кутовий коефіцієнт дотичної у кожній її точці $k = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

149. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку *A* (0;-1), якщо всі її дотичні паралельні до прямої *y* = 5*x* – 3.

150. Швидкість тіла пропорційна пройденому шляху. За перші 10*с* тіло проходить 100*м*, за 15*с* – 200*м*. Який шлях пройде тіло за 20*с*?

151. За який час тіло, нагріте до 100°, охолоне до 25° при температурі навколишнього середовища 20°, якщо до 60° воно охолоджується за 10 хвилин? (За законом Ньютона швидкість охолодження пропорційна різниці температур.)

Завдання для самостійної роботи

152. Довести, що функція $y = x^2 \ln x$ є розв'язком рівняння $xy'' - y' = 2x$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння (153-156).

153. $(x^2+16)dy + (y-7)dx = 0$

154. $(x+7)y' + (y^2+1) = 0$

155. $(x^2 - xy)dy + y^2dx = 0$

156. $xyy' - y^2 = 5x^2$

Розв'язати задачу Коші (36-37)

157. $y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$, $y(1)=0$.

158. $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$, $y(1)=0$

§ 2. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Загальні поняття

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$A(x)y' + B(x)y = C(x), \qquad (1)$$

де $A(x), B(x), C(x)$ – неперервні функції на інтервалі $(\alpha;\beta)$, причому $A(x) \neq 0$.

Оскільки $A(x) \neq 0$, рівняння (2.1) можна записати у вигляді

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (2)$$

Якщо $q(x)$ тотожно дорівнює нулю, рівняння (2) називають *лінійним однорідним диференціальним рівнянням.*

Лінійні однорідні рівняння є рівняннями з відокремлюваними змінними.

У випадку, коли функція $q(x) \neq 0$, рівняння (2) називають *лінійним неоднорідним рівнянням.* Для розв'язування таких рівнянь використовують, в основному, два методи – Лагранжа або Бернуллі.

1.2. Метод Лагранжа (метод варіації сталої)

За методом Лагранжа шукають спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y' + p(x)y = 0$.

Потім допускаємо, що стала *C* сама є функцією $C = C(x)$ і знаходимо цю функцію, підставляючи знайдений вираз у дане неоднорідне рівняння.

Зауваження. Загальний розв'язок рівняння фактично дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y = y_0 + V$.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y' + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int 2xdx \Rightarrow \ln y = -x^2 + \ln C \Rightarrow$$

$$y = C \cdot e^{-x^2}.$$

Ми одержали цей розв'язок у вигляді $y = C \cdot e^{-x^2}$. Допускаємо, що стала *C* є функцією $C = C(x)$. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді $y = C(x) \cdot e^{-x^2}$. Тоді $y' = C'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xC(x) \cdot e^{-x^2}$. Підставимо в дане рівняння знайдені вирази

$$C'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xC(x) \cdot e^{-x^2} + 2xC(x) \cdot e^{-x^2} = 2x \cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow C'(x) \cdot e^{-x^2} = 2x \cdot e^{-x^2} \Rightarrow \quad C'(x) = 2x \Rightarrow \quad C(x) = x^2 + C.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння $y = \left(x^2 + C\right) \cdot e^{-x^2}$.

1.3. Метод Бернуллі

За методом Бернуллі розв'язок рівняння (1) знаходиться у вигляді $y = u \cdot v$, де u і v – невідомі функції.

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння із першого прикладу методом Бернуллі.

Розв'язання. За методом Бернуллі розв'язок цього рівняння знайдемо у вигляді $y = u \cdot v$, де u і v – невідомі функції. Тоді $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Підставимо у дане рівняння замість y та y' відповідні вирази і одержимо:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 2xu \cdot v = 2xe^{-x^2}.$$

Винесемо із другого та третього доданків спільний множник u за дужки:

$$u'\cdot v+u\cdot(v'+2x\cdot v)=2xe^{-x^2}.$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю

$$v'+2x\cdot v=0.$$

Одержане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв′яжемо його і знайдемо функцію v:

$$\frac{dv}{dx}=-2xv\Rightarrow \quad \frac{dv}{v}=-2xdx\Rightarrow \quad \ln|v|=-\int 2xdx+\ln C\Rightarrow \ln|v|=-x^2+\ln C\Rightarrow v=Ce^{-x^2}.$$

Для визначеності візьмемо $C=1$, тоді $v=e^{-x^2}$.

Повернемося до нашого рівняння і підставимо замість v знайдений вираз

$$u'\cdot e^{-x^2}=2xe^{-x^2}\Rightarrow \quad u'=2x\Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=2x\Rightarrow \quad u=\int 2xdx\Rightarrow \quad u=x^2+C.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння такий:

$$y=\left(x^2+C\right)e^{-x^2}.$$

Приклад 3. Електричне коло складається з послідовно ввімкнутих джерела постійного струму , що має напругу E, опору R, самоіндукції L та вимикача, який вмикається при $t=0$. Визначити залежність сили струму від часу.

Розв'язання. Для визначення сили струму в електричному колі із самоіндукцією користуються формулою $L\dfrac{dI}{dt}+RI=E$. Маємо лінійне диференціальне рівняння. Розв'яжемо його методом Бернуллі. Позначимо $I=u\cdot v$, де u і v – невідомі функції. Тоді $I'=u'\cdot v+u\cdot v'$. Підставимо у дане рівняння відповідні вирази і одержимо: $L(u'\cdot v+u\cdot v')+Ru\cdot v=E$. Винесемо із другого та третього доданків спільний множник u за дужки:

$$Lu'\cdot v+u\cdot(Lv'+R\cdot v)=E.$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю

$$Lv'+R\cdot v=0.$$

Одержане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв′яжемо його і знайдемо функцію v:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{-Rv}{L}\Rightarrow \quad \frac{dv}{v}=\frac{-Rdt}{L}\Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{Rdt}{L}\Rightarrow \ln|v|=-\frac{R}{L}t+\ln C\Rightarrow v=Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Для визначеності візьмемо $C=1$, тоді $v=e^{-\frac{R}{L}t}$.

Повернемося до нашого рівняння і підставимо замість v знайдений вираз

$$L\cdot u'\cdot e^{-\frac{R}{L}t}=E\Rightarrow\quad u'=\frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}\Rightarrow\quad\frac{du}{dt}=\frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}\Rightarrow$$

$$u=\int\frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}dt=\frac{E}{L}\cdot\frac{L}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}t}+C\Rightarrow\ u=\frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t}+C.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння такий:

$$I=\left(\frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t}+C\right)e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{E}{R}+Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Використовуючи початкову умову $I(0)=0$, знайдемо значення константи *C*. $0=\frac{E}{R}+Ce^{0}\Rightarrow C=-\frac{E}{R}$. Тому $I=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Знехтувавши досить малою величиною $e^{-\frac{R}{L}t}$, одержимо відомий з фізики закон Ома $I=\frac{E}{R}$.

1.4. Рівняння Бернуллі

Рівняння вигляду

$$y'+p(x)y=q(x)y^{n}, \tag{3}$$

де $p(x)\,i\ q(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі $(\alpha;\beta)$ називаються *рівняннями Бернуллі.*

При $n=0$ рівняння (3) є лінійним рівнянням, при $n=1$ – рівнянням з відокремлюванимими змінними. Припустимо, що *n* – раціональне число, причому $n\neq 0;1$.

Перепишемо рівняння (3) так :

$$y^{-n}y'+p(x)y^{1-n}=q(x).$$

Домножимо одержане рівняння на $(1-n)$

$$(1-n)y^{-n}y'+(1-n)p(x)y^{1-n}=(1-n)q(x).$$

Введемо заміну $z=y^{1-n}$, тоді $z'=(1-n)y^{-n}y'$. В результаті такої заміни будемо мати рівняння

$$z'+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x).$$

А це лінійне диференціальне рівняння і для його розв'язування можна використати метод Лагранжа чи Бернуллі.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y'+\frac{y}{x}=xy^{3}$.

Розв'язання. Дане рівняння перепишемо у вигляді

$$y^{-3}y'+\frac{1}{x}y^{-2}=x.$$

Домножимо одержане рівняння на 1–*n*= –2

$$-2y^{-3}y' - 2\frac{1}{x}y^{-2} = -2x.$$

Введемо заміну $z = y^{-2}$, тоді $z' = -2y^{-3}y'$. В результаті такої заміни отримали лінійне диференціальне рівняння

$$z' - \frac{2}{x}z = -2x.$$

Для його розв'язання використаємо метод Бернуллі. Введемо заміну $z = uv; \quad z' = u'v + uv'$. Маємо:

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = -2x \quad \Rightarrow u'v + u(v' - \frac{2}{x}v) = -2x.$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю

$$v' - \frac{2}{x}v = 0.$$

Одержане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його і знайдемо функцію v

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{2}{x}dx \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v} = \int\frac{2}{x}dx \Rightarrow \quad \ln|v| = 2\ln|x| + \ln C \Rightarrow \quad v = Cx^2.$$

Для визначеності візьмемо $C = 1$, тоді $v = x^2$. Повернемося до нашого рівняння і підставимо замість v знайдений вираз

$$u'x^2 = -2x \Rightarrow \quad u' = -\frac{2}{x} \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \quad u = -\int\frac{2}{x}dx + \ln C \Rightarrow \quad u = \ln Cx^{-2}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння $z' - \frac{2}{x}z = -2x$ має вигляд:

$$z = x^2 \ln Cx^{-2}.$$

Повернемося до функції y

$$y^{-2} = x^2 \ln Cx^{-2} \Rightarrow \quad y = x^{-1}\left(\ln Cx^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x\sqrt{\ln Cx^{-2}}}.$$

Рівняння (3) можна розв'язати і безпосередньо, використовуючи метод Бернуллі.

Приклад 5. Використовуючи метод Бернуллі розв'язати рівняння із третього прикладу.

Розв'язання. За цим методом розв'язок будемо шукати у вигляді $y = u \cdot v$. Тоді $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Підставимо у дане рівняння замість *y* та y' відповідні вирази і одержимо

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{1}{x}u \cdot v = xu^3 \cdot v^3,$$

або

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + \frac{1}{x} \cdot v) = xu^3 \cdot v^3.$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю

$$v' + \frac{1}{x} \cdot v = 0.$$

Одержане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \quad \ln|v| = -\ln x + \ln C \Rightarrow v = \frac{C}{x}.$$

Для визначеності візьмемо $C = 1$, тоді $v = \frac{1}{x}$.

Знаходимо невідому функцію *u*.

$$u' \cdot \frac{1}{x} = xu^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}u^3 \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}u^3 \Rightarrow \frac{du}{u^3} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u^3} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{u^{-2}}{-2} = \ln x + \ln C \quad \Rightarrow \quad u^{-2} = -2\ln Cx.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння такий:

$$y = \frac{1}{x\sqrt{\ln Cx^{-2}}}.$$

1.5. Рівняння у повних диференціалах

Диференціальне рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

називають *рівнянням у повних диференціалах*, якщо ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ двох незалежних функцій x та y, тобто

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Диференціальна форма $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ буде повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ двох незалежних змінних x та y, тоді й лише тоді, коли

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Функцію $u = u(x, y)$ знаходять у вигляді

$$u(x, y) = \int M(x; y)dx + \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ знаходиться з рівності $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x; y)$.

Зауваження. Якщо для функції $u = u(x, y)$ має місце рівність $du = 0$, то $u(x, y) = C$. Отже, *загальний інтеграл* рівняння в повних диференціалах має вигляд

$$u(x, y) = C.$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $(x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$

Розв'язання. *І спосіб.* $M(x; y) = (x^2 + 2xy)$, $N(x; y) = (x^2 - y^2) \quad \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$,

тому дане рівняння є рівнянням в повних диференціалах, тобто існує така функція

$u = u(x, y)$, повний диференціал якої дорівнює лівій частині даного рівняння. Будемо шукати її у вигляді

$$u(x, y) = \int M(x; y)dx + \varphi(y);$$

$$u(x, y) = \int (x^2 + 2xy)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 y + \varphi(y).$$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x; y)$, то $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \varphi'(y) = -y^2 \Rightarrow$

$\varphi(y) = -\int y^2 dy \Rightarrow \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + C$. Отже, $u(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y - \frac{y^3}{3} + \frac{C}{3}$.

Загальний інтеграл даного рівняння запишемо у вигляді $x^3 + 3x^2 y - y^3 = C$.

Рівняння в повних диференціалах можна розв'язати й іншим способом:

II спосіб. Функцію $u = u(x, y)$, повний диференціал якої дорівнює лівій частині даного рівняння, будемо шукати у вигляді $u(x, y) = \int M(x; y)dx + \varphi(y)$.

$$u(x, y) = \int (x^2 + 2xy)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 y + \varphi(y).$$

З іншого боку $u(x, y) = \int N(x; y)dy + \psi(x)$, тому $u(x, y) = \int (x^2 - y^2)dy = x^2 y - \frac{y^3}{3} + \psi(x)$.

Отже, $u(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y - \frac{y^3}{3} + C$.

Маємо той самий загальний інтеграл $x^3 + 3x^2 y - y^3 = C$.

Зауваження. Л. Ейлер довів, що для будь якого диференціального рівняння першого порядку $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, для якого не виконується рівність $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, існує інтегруючий множник $\mu = \mu(x; y)$ такий, що диференціальне рівняння $\mu(x; y)M(x, y)dx + \mu(x; y)N(x, y)dy = 0$ є диференціальним рівнянням в повних диференціалах.

Запитання для самоперевірки

1. Які рівняння називають лінійними диференціальними рівняннями першого порядку?
2. Що розуміють під однорідними диференціальними рівняннями першого порядку?
3. В чому полягає метод Лагранжа для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку?
4. Сформулювати ідею метода Бернуллі при розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.
5. Які рівняння називаються рівняннями Бернуллі?
6. Які методи застосовуються для розв'язування рівнянь Бернуллі?
7. Як можна рівняння Бернуллі звести до лінійного?
8. Яке рівняння називають рівнянням в повних диференціалах?

9. Сформулюйте необхідну і достатню умову того, щоб рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ було рівнянням в повних диференціалах.

Навчальні завдання

Розв'язати диференціальне рівняння (159-167), використовуючи методи Лагранжа чи Бернуллі

159. $xy' - 2y = x^4$. 160. $x^4y' + 4x^3y = 3$. 161. $y' - yctgx = \cos x$.
162. $x^2y' - 3xy = x + 4$. 163. $x^3y' - 4x^2y = x^4 + 2$. 164. $y'\sin x - y\cos x = \sin 2x$.
165. $xy' + 5y = 2x^6$. 166. $2x^2y' - 4xy = x^3 - 5$. 167. $x^5y' + 2x^4y = x^2 + 3$.

Розв'язати задачу Коші (168 - 171).

168. $xy' + y - e^x = 0, \quad y(1) = 4$. 169. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^2}, \quad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$.

170. $xy' + 5y = x^{-4}\cos x, \quad y(\pi) = 0$. 171. $xy' - 4y = \dfrac{2x^6}{1+x^2}, \quad y(0) = 5$.

Розв'язати рівняння Бернуллі (172- 177).

172. $y' + yx^3 = x^3y^2$. 173. $y' + xy = xy^3$. 174. $y' + xy^3 = yx$.
175. $y + y^2 - 2xy' = 0$. 176. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$. 177. $y' + xy^3 = yx$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння(178-185).

178. $(2xy - 3)dx + (x^2 + 1)dy = 0$. 179. $(2xy^3 + 4y)dx + (3x^2y^2 + 4x)dy = 0$.
180. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$ 181. $(4x + 3y)dx + (3x + 3y^2)dy = 0$.
182. $(20xy + 5)dx + (10x^2 + 5y^4)dy = 0$. 183. $(y^2 - 12x^3y^5)dx + (2xy - 15x^4y^4)dy = 0$.
184. $(8x - 4y + 4)dx + (2y - 4x - 2)dy = 0$ 185. $(6xy - 12)dx + (3x^2 + 3y^2 - 15)dy = 0$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати диференціальне рівняння (186 - 188), використовуючи методи Лагранжа чи Бернуллі

186. $2xy' + 6y = 5x^7$ 187. $x^6y' - 2x^5y = x^4 + 1$ 188. $y' - yctgx = \sin x$

Розв'язати задачу Коші (189 - 190).

189. $y' - \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = 7{,}5$. 190. $y' + y = e^{3x}, \quad y(0) = 7$.

191. Розв'язати рівняння Бернуллі $y'x + y = -xy^2$.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

192. $(2y^2 - 6xy)dx + (4xy - 3x^2)dy = 0$. 193. $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$.

§3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

1.1. Деякі класи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають пониження порядку

Деякі класи диференціальних рівнянь вищих порядків, які можна безпосередньо проінтегрувати, або понизити їх порядок, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

№	Диференціальне рівняння	Підстановка	Нове рівняння
I	$y^{(n)} = f(x)$	–	$y^{(n-1)} = \int f(x)dx$
II	$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)})=0$, де , F не залежить від y.	$z=y^{(k)}$	$F(x,z,z',\ldots,z^{(n-k)})=0$
III	$F(y,y',y'')=0$, де F не залежить від x.	$y'=z,\ y''=z'z$	$F(y,z',z'z)=0$
IV	$F(y^{(n-2)},,y^{(n)})=0$ $y^{(n)}=f(y^{(n-2)})$	$y^{(n-2)}=z,\ y^{(n)}=z''$ домножимо на $2z'dx$	$2z'z''dx=2f(z)z'dx$ $d(z')^2=2f(z)dz$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y^{(4)} = \sin 3x$.

***Розв'язання*.** Проінтегруємо цю рівність 4 рази.

$$y''' = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C_1;$$

$$y'' = \int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x + C_1\right)dx = -\frac{1}{9}\sin 3x + C_1x + C_2;$$

$$y' = \int\left(-\frac{1}{9}\sin 3x + C_1x + C_2\right)dx = \frac{1}{27}\cos 3x + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3;$$

$$y = \int\left(\frac{1}{27}\cos 3x + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3\right)dx = \frac{1}{81}\sin 3x + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

Отже, загальним розв'язком даного рівняння є функція

$$y = \frac{1}{81}\sin 3x + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння: $2xy''=y'$.

Розв'язання. Це рівняння не залежить явно від y. Вводимо заміну $z = y'$, тоді $y'' = z'$ і дане рівняння матиме вигляд

$$2xz' = z \Rightarrow \quad 2x\frac{dz}{dx} = z \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow \quad \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{2x} \Rightarrow \quad \ln|z| = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln C \Rightarrow$$

$$\ln|z| = \ln C|x|^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \quad |z| = C|x|^{\frac{1}{2}}.$$

Зробимо зворотну заміну.

$$y' = C_1x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = C_1x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \quad dy = C_1x^{\frac{1}{2}}dx \Rightarrow \quad y = \int C_1x^{\frac{1}{2}}dx \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}C_1x^{\frac{3}{2}} + C_2.$$

Отже, загальним розв'язком даного рівняння є функція $y = \frac{2}{3} C_1 \sqrt{x^3} + C_2$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y = 0.$$

Розв'язання. Оскільки диференціальне рівняння не містить явно аргументу *x*, то його порядок можна понизити, якщо новим аргументом візьмемо *y*, а в ролі залежної змінної *z=y′*. Одержимо рівність

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z.$$

Підставимо в дане рівняння

$$\frac{dz}{dy} \cdot z + y = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dy} \cdot z = -y \Rightarrow zdz = -\mathrm{y}\mathrm{dy} \Rightarrow \int zdz = -\int ydy \Rightarrow \frac{z^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1 \Rightarrow$$

$$z = \pm\sqrt{C_1 - y^2}.$$

Робимо зворотну заміну і розв'язуємо нове диференціальне рівняння: $y' = \pm\sqrt{C_1 - y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 - y^2} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = \pm dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = \pm\int dx \Rightarrow$

$$\arcsin \frac{y}{\sqrt{C_1}} = \pm x + C_2 \Rightarrow \frac{y}{C_1'} = \sin(C_2 \pm x) \Rightarrow y = C_1' \sin(C_2 \pm x).$$

Запитання для самоперевірки

1. Які є класи диференціальних рівнянь, які допускають пониження порядку?
2. Як розв'язується рівняння $y^{(n)} = f(x)$?
3. Як розв'язується рівняння $F(y, y', y'')=0$, де F не залежить від x ?
4. Який метод розв'язування рівняння $F(y^{(n-2)}, , y^{(n)})=0$ $y^{(n)}=f(y^{(n-2)})$ рівняння

Навчальні завдання

Розв'язати задачу Коші (194-195).

194. $y'' = \cos 3x$, $y(0) = \frac{8}{9}$, $y`(0) = 5$.

195. $y''' = e^{-2x}$ $y(0) = \frac{7}{8}$, $y`(0) = \frac{5}{4}$, $y``(0) = 1{,}5$.

Розв'язати диференціальні рівняння (196 - 199)

196. $y'' = \sin x + x$

197. $y''' = 2x^3 - 3^x$

198. $y'' = 27e^{3x} + 120x^3$

199. $y'' \cos^3 x = 3\sin x$.

Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь вищих порядків(200 - 209).

200. $y'' tgy = 2(y')^2$.

201. $yy'' - (y')^2 = 0$.

202. $y'' = -y$.

203. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$

204. $y'' y^3 = -1$

205. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$

206. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$ 207. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$

208. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$ 209. $y'' - 2ctgxy' = \sin^3 x$

Розв'язати задачу Коші (210 - 211).

210. $y'' = y' \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 6$ 211. $y'' = \frac{y'}{x} + x \quad y(0) = 9 \quad y'(2) = 8.$

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння (212 - 216).

212. $y'' = \sin\frac{x}{2}$. 213. $y'' = 27e^{3x} + 120x^3$.

214. $9y'' - y = 0$. 215. $y'' + y'tgx = \sin 2x$.

216. $(1+x^2)y'' = 2xy'$.

§ 4. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

1.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = 0 , \qquad (1)$$

де p і q – сталі, називається ***лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами***.

Л.Ейлер розробив загальний метод розв'язування таких диференціальних рівнянь. Частинні розв'язки таких рівнянь шукають у вигляді

$$y = e^{kx}. \text{ Тоді } y' = ke^{kx} \; y'' = k^2 e^{kx}.$$

Підставимо ці вирази в рівняння (1)

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \Rightarrow e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0 .$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то маємо

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (2)$$

характеристичне рівняння диференціального рівняння (1). Це звичайне квадратне рівняння, тому розглянемо всі можливі випадки існування його коренів (табл. 2)

Таблиця 2

№ п/п	Корені характеристичного рівняння	Загальний розв'язок диференціального рівняння
1	$k_1 = k_2$	$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$
2	$k_1 \neq k_2$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

3	$k=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

Приклад 1. Розв'язати рівняння: *а*) $y''+5y'+6y=0$; *б*) $y''+2y'+5y=0$.

Розв'язання. *а*) Дане диференціальне рівняння є лінійним однорідним. Складемо його характеристичне рівняння $k^2+5k+6=0$. Коренями цього рівняння є різні дійсні числа $k_1=-2$ $k_2=-3$. Тому загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}.$$

б) Характеристичне рівняння в цьому випадку буде таким: $k^2+4k+5=0$. Оскільки корені характеристичного рівняння є комплексними числами $k=-1\pm 2i$, то загальний розв'язок рівняння *б*) запишемо у вигляді

$$y=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right).$$

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші $y''+4y'+4y=0$, $y(0)=-4,\quad y'(0)=5$.

Розв'язання.. Характеристичне рівняння $k^2+4k+4=0$ має однакові корені $k_1=k_2=-2$. Тому загальний розв'язок диференціального рівняння є таким: $y=e^{-2x}\left(C_1+C_2x\right)$.

Знайдемо його частинний розв′язок, який відповідає вказаним початковим умовам.

$y(0)=e^0\left(C_1+C_2\cdot 0\right)\Rightarrow\quad -4=C_1$.

$y'(x)=-2e^{-2x}\left(C_1+C_2x\right)+C_2e^{-2x}\Rightarrow y'(0)=-2e^0\left(C_1+C_2\cdot 0\right)+C_2e^0\Rightarrow\quad 5=-2C_1+C_2\Rightarrow$

$\Rightarrow C_2=5-8=3$.

Звідки частинний розв′язок даного рівняння, який відповідає вказаним початковим умовам, має вигляд $y=e^{-2x}\left(-4+3x\right)$.

Приклад 3. Знайти лінійне диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, корені характеристичного рівняння якого дорівнюють $k_1=1-i$ та $k_2=1+i$.

Розв'язання. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд $y=e^{x}\left(\cos x+i\sin x\right)$. Для відшукання самого диференціального рівняння складемо спочатку відповідне йому характеристичне рівняння

$k^2+pk+q=\left(k-k_1\right)\cdot\left(k-k_2\right)=\left(k-1+i\right)\cdot\left(k-1-i\right)=\left(\left(k-1\right)+i\right)\cdot\left(\left(k-1\right)-i\right)=$

$\left(k-1\right)^2-i^2=k^2-2k+1+1=k^2-2k+2$.

Отже, шукане рівняння має вигляд

$$y''-2y'+2y=0.$$

***1.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами*.**

Рівняння вигляду

$$y''+py'+qy=Q(x), \tag{3}$$

де p і q – сталі, називається ***лінійним неоднорідним диференціальним рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами***.

Загальний розв'язок цього рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (1) та частинного розв'язку неоднорівного рівняння (3)

$$y = y_o + V.$$

В загальному випадку частинний розв’язок неоднорідного рівняння знайти досить складно. Проте в деяких випадках, коли права частина рівняння (3) має спеціальну структуру, його частинний розв'язок можна знайти без інтегрування (табл. 3).

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y = xe^{2x}$.

Розв΄язання. 1. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - y = 0$. Оскільки характеристичне рівняння $k^2 - 1 = 0$ має корені $k_1 = -1$ $і$ $k_2 = 1$, то загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y_o = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$.

Таблиця 3

Вигляд правої частини рівняння	Додаткові умови	Частинний розв′язок
$Q(x) = P_n(x)e^{kx}$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n	k не є коренем характеристичного рівняння	$V = T_n(x)e^{kx}$, де $T_n(x)$– многочлен степеня n з невідомими коефіцієнтами
	$k = k_1 \neq k_2$	$V = xT_n(x)e^{kx}$
	$k = k_1 = k_2$	$V = x^2 T_n(x)e^{kx}$
$Q(x) = e^{kx}(A\sin\beta x + B\cos\beta x)$	$\alpha \pm \beta i$ – не є коренем характеристичного рівняння	$V = e^{kx}(C\sin\beta x + D\cos\beta x)$, де C і D – невідомі коефіцієнти
	$\alpha \pm \beta i$ – корінь характеристичного рівняння	$V = xe^{kx}(C\sin\beta x + D\cos\beta x)$, де C $і$ D – невідомі коефіцієнти

2. Число $k = 2$ не є коренем характеристичного рівняння. Частинний розв′язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $V(x) = (Ax + B)e^{2x}$.

Тоді

$$V'(x) = (A + 2Ax + 2B)e^{2x};\ V''(x) = (4A + 4Ax + 4B)e^{2x}.$$

Підставимо ці вирази у дане рівняння:

$$(4A + 4Ax + 4B)e^{2x} - (Ax + B)e^{2x} = xe^{2x} \Rightarrow 4A + 3Ax + 3B = x \Rightarrow (4A + 3B) + 3Ax = x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4A + 3B = 0; \\ 3A = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3}; \\ B = -\dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок цього рівняння буде $V(x)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\right)e^{2x}$.

Тому загальний розв'язок запишемо так:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\right)e^{2x}.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''-y=xe^{x}$.

Розв'язання. 1. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''-y=0$ знайдено у попередньому прикладі $y_0=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$.

2. Оскільки число $k=1$ є коренем характеристичного рівняння кратності 1, то частинний розв′язок даного рівняння шукаємо у вигляді:

$V(x)=x(Ax+B)e^{x}\Rightarrow V(x)=\left(Ax^2+Bx\right)e^{x}$; $V'(x)=\left(2Ax+B+Ax^2+Bx\right)e^{x}$;

$V''(x)=\left(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B\right)e^{x}$.

Підставимо ці вирази у дане рівняння:

$\left(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B\right)e^{x}-\left(Ax^2+Bx\right)e^{x}=xe^{x}\Rightarrow$

$$4Ax+(2A+2B)=x\Rightarrow\begin{cases}2A+2B=0;\\4A=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{4};\\B=-\frac{1}{4}.\end{cases}.$$

Отже, частинний розв′язок даного рівняння буде $V(x)=\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\right)e^{x}$.

Тому загальний розв′язок має вигляд

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\right)e^{x}.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв′язок рівняння

$$y''-9y=e^{3x}(\cos x+\sin x).$$

Розв'язання. Відповідне однорідне рівняння $y''-9y=0$.

Характеристичне рівняння $k^2-9=0\Rightarrow k^2=9\Rightarrow k_{1,2}=\pm3$.

Загальний розв′язок однорідного рівняння $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}$.

Із правої частини видно, що $\alpha=3;\ \beta=1$, але число $3+i$ не є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв′язок даного рівняння слід шукати у вигляді $V(x)=e^{3x}(A\sin x+B\cos x)$.

$V'(x)=3e^{3x}(A\sin x+B\cos x)+e^{3x}(A\cos x-B\sin x)\Rightarrow V''(x)=9e^{3x}(A\sin x+B\cos x)+$

$+3e^{3x}(A\cos x-B\sin x)+3e^{3x}(A\cos x-B\sin x)+e^{3x}(-A\sin x-B\cos x)\Rightarrow$

$V''(x)=e^{3x}(9(A\sin x+B\cos x)+6(A\cos x-B\sin x)+(-A\sin x-B\cos x))$

$$V''(x)=e^{3x}((8A-6B)\sin x+(8B+6A)\cos x).$$

Підставимо знайдені вирази у рівняння.

$$e^{3x}\left((8A-6B)\sin x+(8B+6A)\cos x-9(A\sin x+B\cos x)\right)=e^{3x}(\cos x+\sin x).$$

Прирівняємо многочлени при синусах і косинусах в обох частинах рівняння $\begin{cases}-A-6B=1\\ 6A-B=1\end{cases}$; $\begin{cases}A=\dfrac{5}{37}\\ B=-\dfrac{7}{37}\end{cases}$.

Отже, частинний розв′язок даного рівняння буде

$$V(x)=e^{3x}\left(\frac{5}{37}\sin x-\frac{7}{37}\cos x\right).$$

Тоді загальний розв′язок запишеться так:

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}+e^{3x}\left(\frac{5}{37}\sin x-\frac{7}{37}\cos x\right).$$

Приклад 7. Знайти частинний розв′язок рівняння $y''+y=\sin x$, який задовольняє початкові умови $y(0)=1;\quad y'(0)=-5.$

Розв′язання. Відповідне однорідне рівняння $y''+y=0$.

Характеристичне рівняння $k^2+1=0\Rightarrow k^2=-1\Rightarrow k_{1,2}=\pm i$.

Загальний розв′язок однорідного рівняння $y=e^{0x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

Із правої частини видно, що $\alpha=0;\quad \beta=1$, число $0+i$ є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв′язок даного рівняння знаходимо у вигляді $V(x)=xe^{0x}(A\sin x+B\cos x)\Rightarrow V(x)=x(A\sin x+B\cos x)$.

$V'(x)=A\sin x+xA\cos x+B\cos x-xB\sin x$;

$V''(x)=2A\cos x-xA\sin x-2B\sin x-xB\cos x$.

Підставивши знайдені вирази у дане рівняня будемо мати:

$$2A\cos x-xA\sin x-2B\sin x-xB\cos x+xA\sin x+xB\cos x=\sin x\Rightarrow$$

$$2A\cos x-2B\sin x=\sin x\Rightarrow\begin{cases}2A=0\\ -2B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\ B=-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Отже, частинним розв′язком даного рівняння буде функція $V(x)=-\frac{1}{2}x\cos x$, а його загальний розв′язок матиме вигляд $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$.

Знайдемо частинний розв′язок даного рівняння, обчисливши C_1 і C_2.

$y(0)=C_1\cos 0+C_2\sin 0-0\Rightarrow 1=C_1$;

$y'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}x\sin x$;

$y'(0)=-C_1\sin 0+C_2\cos 0-\frac{1}{2}\cos 0+\frac{1}{2}0\sin 0;\Rightarrow -5=C_2-\frac{1}{2};\Rightarrow C_2=-\frac{9}{2}$.

Звідки остаточно маємо $y=\cos x-\frac{9}{2}\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$.

Запитання для самоперевірки

1. Які рівняння називають лінійними диференціальними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами?

2. Який вигляд має загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку, якщо дискримінант характеристичного рівняння: додатній? від′ємний? дорівнює нулю?

3. У якому вигляді шукають частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку, якщо права частина є добуток $P_n(x)e^{\alpha x}$, де $P_n(x)$- многочлен степеня n, і при цьому:

1) α не є коренем характеристичного рівняння;

2) α є коренем характеристичного рівняння кратності 1;

3) α є коренем характеристичного рівняння кратності 2?

Навчальні завдання

Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння(217 - 222).

217. $y''+7y'-8y=0$.   218. $y''+10y'+25y=0$.   219. $y''+2y'+5y=0$.

220. $y''+8y'+16y=0$.   221. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=0$.   222. $y''-2y'+10y=0$.

Розв'язати задачу Коші (103-106).

223. $y''-4y=0$, $y(0)=1,\quad y'(0)=0$ 224. $y''+14y'+49y=0$, $y(0)=8, y'(0)=6$.

225. $y''-4y'+5y=0$, $y(0)=1,\quad y'(0)=0$.   226. $y''-2y'=0$, $y(0)=1,\quad y'(0)=0$.

Функція $y=f(x)$ задає праву частину лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, а коренями відповідного однорідного рівняння є числа k_1 та k_2. Вкажіть структуру частинного розв'язку цього рівняння (227 - 238) .

227. $f(x)=-36e^{-x}$, $k_1=5; k_2=-2$.   228. $f(x)=2(1-x)$, $k_1=4; k_2=0$.

229. $f(x)=-51x^2-56x+19$, $k_1=3; k_2=3$.   230. $f(x)=-108xe^{-3x}$, $k_1=15; k_2=-3$.

231. $f(x)=2\sin x+3\cos x$, $k_1=0; k_2=-2$.   232. $f(x)=-65\cos 3x+5\sin 3x$, $k_{1,2}=\pm 3i$.

233. $f(x)=\left(12x^2+42x+9\right)e^{2x}$, $k_1=-5; k_2=2$.   234. $f(x)=(x+5)e^{-7x}$, $k_{1,2}=-7$.

235. $f(x)=\left(-36x^3+13\right)e^{-2x}$, $k_1=2; k_2=9$.   236. $f(x)=-96\cos 4x-32\sin 4x$, $k_{1,2}=2\pm 4i$

237. $f(x)=6x^2+2x-3$, $k_{1,2}=8\pm 5i$.   238. $f(x)=8x^2-5$, $k_1=0; k_2=-2$.

Знайти структуру частинних розв'язків рівнянь (239 - 242)

239. $y''+6y'+10y=e^{-5x}$.   240. $y''+10y'+25y=3\cos 5x+2\sin 5x$.

241. $y''+9y=4e^{-3x}$.   242. $y''+3y'-4y=8x^2-5$.

Знайти загальний розв'язок рівняння (243 - 248).

243. $y'' + 7y' + 12y = -30e^{2x}$.

244. $y'' + 5y' + 4y = 12x^2 + 42x + 9$.

245. $y'' - 2y' + 10y = 16\cos 4x + 12\sin 4x$.

246. $y'' - 4y' = 24x^2 + 4x - 14$.

247. $y'' - 6y' + 9y = -108e^{3x}$.

248. $y'' + 8y' + 16y = -96\cos 4x - 32\sin 4x$

Знайти частинний розв'язок даного диференціального рівняння, який задовольняє вказані початкові умови (249 - 254).

249. $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$, $y(0) = -1,\ y'(0) = 1$.

250. $y'' + 2y' + 5y = x^2 - 7x + 2$, $y(0) = 2,\ y'(0) = -2$.

251. $y'' - 4y' + 3y = 10e^{3x}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.

252. $y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x$, $y(0) = 3,\ y'(0) = -3$.

253. $y'' - y' = 2(1 - x)$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

254. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.

255. Ланцюг завдовжки 6*м* сповзає зі стовпа без тертя. Рух почався тоді, коли звисав 1*м* ланцюга. За який час сповзе весь ланцюг?

256. Матеріальна точка масою 1*г* рухається прямолінійно. На неї діють сила в напрямку руху, пропорційна часу (коефіцієнт пропорційності $\lambda = 2 \cdot 10^{-5}\ кг \cdot м / с^3$), та сила опору середовища, пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності $\mu = 2 \cdot 10^{-3}\ кг / с^2$). Визначити швидкість точки через 10*с* після початку руху, якщо її початкова швидкість дорівнює нулю.

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння (257 - 258).

257. $y'' + y' - 12y = 0$.

258. $y'' - 4y' + 20y = 0$.

259. Розв'язати задачу Коші $y'' + 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$.

Знайти загальний розв'язок рівняння (260 - 261).

260. $y'' + y' - 2y = 6x^2$

261. $y'' - 10y' + 25y = 10e^{2x}$.

262. Знайти частинний розв'язок даного диференціального рівняння $y'' - y = e^x$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.

Глава 11
РЯДИ
§ 1. Числові ряди
1.1. Основні поняття

Нехай задана нескінченна числова послідовність $u_1, u_2, ..., u_n ...$, тоді суму вигляду

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \qquad (1)$$

називають ***числовим рядом***, а самі числа $u_1, u_2, ..., u_n ...$ його елементами.

Суму n перших членів числового ряду (1) називають ***n-ою частинною сумою.***

Числовий ряд називають ***збіжним***, якщо існує границя послідовності частинних сум ряду $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$.

При цьому величина S називається ***сумою ряду***, а число $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ...$ – ***залишком ряду***. Залишок ряду показує, з якою швидкістю S_n наближається до S.

Якщо границя S_n не існує (нескінченна), то ряд називають ***розбіжним***.

1.2. Ряд геометричної прогресії

Сума членів нескінченної геометричної прогресії є ряд вигляду $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + ... + b_1 q^n + ...$ із загальним членом $u_n = b_1 q^n$.

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}, \text{ якщо } q \neq 1 \\ nb_1, \quad \text{якщо } q = 1 \end{cases}.$$

Ряд збігається, якщо знаменник прогресії $|q| < 1$ і його сума $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Ряд геометричної прогресії буде розбіжним, якщо $|q| \geq 1$.

Ряд вигляду $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} + ...$ називають ***гармонічним*** рядом.

Можна довести, що гармонічний ряд є розбіжним.

Необхідна умова збіжності ряду. Якщо ряд збігається, то границя його загального члена дорівнює 0, тобто:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

1.3. Знакододатні числові ряди

Числовий ряд називається ***знакододатним***, якщо всі члени ряду є невід′ємними числами.

Для того щоб знакододатний числовий ряд був збіжний необхідно й достатньо, щоб послідовність його частинних сум $\{S_n\}$ була обмежена.

1.4. Ознаки збіжності знакододатніх числових рядів

Теорема (ознака порівняння). Якщо числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ є знакододатніми і при будь-якому n має місце нерівність $u_n \leq v_n$, то із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ слідує збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, із розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ слідує розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Зауваження. Нерівність $u_n \leq v_n$ не обов′язково повинна виконуватися починаючи з перших номерів, головне, щоб вона виконувалась, починаючи з деякого номера *N*.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 \cdot 3^n}$.

Розв'язання. Порівняємо цей ряд із рядом геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, тут $q=\frac{1}{3}<1$, тому цей ряд збіжний. Оскільки для будь-якого n виконується нерівність $\frac{1}{n^2\cdot 3^n}<\frac{1}{3^n}$, то даний ряд також буде збіжним.

Теорема (ознака граничного порівняння). Нехай числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ є знакододатніми і при чому існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$, яка скінченна і відмінна від нуля, тоді ці ряди збіжні, або розбіжні одночасно.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n^2+1)\cdot 3^n}$.

Розв'язання. Для порівняння використаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot 3^n}$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2\cdot 3^n}:\frac{1}{(2n^2+1)\cdot 3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2}=2\neq 0.$$

То із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot 3^n}$ слідує збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n^2+1)\cdot 3^n}$.

Теорема (ознака Даламбера). Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ є знакододатнім і причому існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\alpha$, тоді у випадку коли $\alpha<1$, ряд буде збіжний; якщо $\alpha>1$, то ряд розбіжний. У випадку, коли $\alpha=1$, ознака Даламбера не дає відповідь на запитання про збіжність ряду.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n=\frac{n^2}{5^n}$. Запишемо

$u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}$ і розглянемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}:\frac{n^2}{5^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{5n^2}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{5}<1.$$

За ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$ збіжний.

Теорема (ознака Коші радикальна). Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ є знакододатніми і причому існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\alpha$, тоді у випадку коли $\alpha<1$, ряд буде збіжний; якщо

$\alpha > 1$, то ряд розбіжний. У випадку, коли $\alpha = 1$, ознака Коші не дає відповідь на запитання про збіжність ряду.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{n}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = \sin^n \frac{\pi}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin^n \frac{\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n} = \sin 0 = 0 < 1.$$

За ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{n}$ збіжний.

Теорема (ознака Коші інтегральна). Якщо функція – неперервна, додатна і монотонно спадає при $x > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ і невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Розв'язання. Якщо *p* = 1, то маємо гармонічний ряд, який являється розбіжним. Допустимо, що $p \neq 1$ і розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{a\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^a = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{-p+1}\cdot\left.\frac{1}{x^{p-1}}\right|_1^a\right) = \frac{1}{-p+1}\lim_{a\to\infty}\left(\left.\frac{1}{x^{p-1}}\right|_1^a\right) = \frac{1}{-p+1}\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{a^{p-1}} - 1\right)$$

Очевидно, що вказана границя існує і скінчена, якщо $p > 1$ і нескінченна, коли $p < 1$. Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ буде збіжний при $p > 1$ і розбіжний при $p \le 1$.

1.5. Рекомендації щодо використання ознак збіжності рядів з додатними членами

1. Ознака Даламбера, як правило, дає результати тоді, коли загальний член ряду є відношенням алгебраїчного і трансцендентного виразів або відношенням трансцендентних виразів. Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, то ознака Даламбера питання про збіжність не вирішує.

2. Радикальна ознака Коші зручна в тому випадку, коли загальний член ряду містить степенево-показниковий вираз.

3. Інтегральна ознака Коші використовується тоді, коли функція загального члена ряду $u_n = f(n) \Rightarrow f(x)$ легко інтегрується.

4. Ознака порівняння рядів може бути використана для рядів з будь-яким загальним членом. При дослідженні ряду за допомогою ознаки порівняння треба вибрати ряд порівняння, збіжність чи розбіжність якого відома.

5. Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, тоді для дослідження збіжності ряду зручно використовувати ознаку порівняння рядів у граничній формі.

6. При дослідженні збіжності рядів рекомендується така послідовність дій:

1) встановити тип ряду (знакододатний чи знакозмінний);

2) перевірити виконання необхідної умови збіжності;

3) використати одну із достатніх ознак збіжності.

1.6. Знакозмінні числові ряди. Знакочергуючі числові ряди

Якщо члени числового ряду (1) можуть бути як додатніми так і від′ємними, то цей ряд називається ***знакозмінним.***

Знакочергуючим рядом називається ряд вигляду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots, \qquad (2)$$

де $u_n \geq 0$, тобто ряд у якого будь-які члени, які стоять поряд мають протилежні знаки.

Теорема (ознака Лейбніца). Якщо для знакочергуючого ряду виконуються умови:

1) $u_n \geq u_{n+1}$, при будь-якому натуральному n;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

то ряд буде збіжним.

Наслідок. Якщо при обчисленні суми збіжного знакочергуючого ряду обмежитись тільки першими n членами, а всі інші відкинути, то похибка за абсолютною величиною не перевищить першого із відкинутих членів.

Зауваження. Умова монотонності ряду є суттєвою для збіжності ряду. Якщо виконується лише друга умова, то ряд може бути розбіжним.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Розв′язання. Загальний член ряду $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ почергово змінює знак, отже, ряд – знакочергуючий. Обидві умови теореми Лейбніца для цього ряду виконуються: 1) $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Таким чином, ряд збіжний.

Приклад 7. Скільки членів збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5^n}$ потрібно залишити, щоб обчислити його суму з точністю до 0,001?

Розв'язання. В силу того, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5^n}$ знакочергуючий і збіжний, скористаємось наслідком з теореми. Почергово обчислимо за абсолютною величиною члени ряду поки не знайдемо такий член, який буде по модулю меншим за 0,001.

$$|u_1|=\frac{1}{5};\ |u_2|=\frac{2}{25};\ |u_3|=\frac{3}{125};\ |u_4|=\frac{4}{625};\ |u_5|=\frac{5}{3125}=\frac{1}{625}>0{,}001;\ |u_6|=\frac{6}{15625}<0{,}001.$$

Отже, достатньо залишити п'ять членів ряду.

При дослідженні збіжності рядів рекомендується така послідовність дій:

1) встановити тип ряду (знакододатний чи знакозмінний);

2) перевірити виконання необхідної умови збіжності;

3) використати одну із достатніх ознак збіжності.

1.7. Абсолютна й умовна збіжність знакозмінних рядів

Розглянемо в загальному випадку знакозміний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ і поряд з ним розглянемо ряд, складений з модулів членів цього ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$.

Теорема (Коші): Якщо збігається ряд із абсолютних величин членів знакозмінного ряду, то збігається і знакозмінний ряд, тобто:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{ – збіжний } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ – збіжний .}$$

Знакозмінний ряд називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд із абсолютних величин членів знакозмінного ряду.

Знакозмінний ряд називається ***умовно збіжним***, якщо цей ряд збігається, а ряд із абсолютних величин його членів розбігається.

Приклад 8. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд

$$\frac{5}{2\sqrt{3}}-\frac{5}{3\sqrt{4}}+\frac{5}{4\sqrt{5}}-\frac{5}{5\sqrt{6}}+\ldots.$$

Розв'язання. Знайдемо загальний член цього ряду: $u_n=\frac{(-1)^{n+1}5}{(n+1)\sqrt{n+2}}$.

Ряд знакочергуючий, перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) $$\frac{5}{(n+1)\sqrt{n+2}}<\frac{5}{(n+2)\sqrt{n+3}};$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{(n+1)\sqrt{n+2}}=0.$$

Ряд збіжний. Розглянемо ряд складений із абсолютних величин його членів:

$$\frac{5}{2\sqrt{3}}+\frac{5}{3\sqrt{4}}+\frac{5}{4\sqrt{5}}+\frac{5}{5\sqrt{6}}+\ldots.$$

Застосуємо для цього ряду інтегральну ознаку Коші. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty}\frac{5}{(x+1)\sqrt{x+2}}dx=\lim_{a\to+\infty}\int_1^a\frac{5}{(x+1)\sqrt{x+2}}dx=\begin{vmatrix} t^2=x+2 \\ x=t^2-2 \\ dx=2tdt \end{vmatrix}=5\lim_{a\to+\infty}\int_1^a\frac{2tdt}{(t^2-1)}=10\lim_{a\to+\infty}\int_1^a\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=10\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{x=1}^{x=a}\right)=5\lim_{a\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{a+2}-1}{\sqrt{a+2}+1}\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right|\right)=5\ln 1-5\ln\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}=-5\ln\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Невласний інтеграл збіжний, отже ряд буде збіжним абсолютно.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке числовий ряд?
2. Що називають n-*ю* частинною сумою ряду?
3. Який числовий ряд називається збіжним?
4. Сформулюйте необхідну умову збіжності числового ряду.
5. Який ряд називається знакододатнім?
6. Сформулюйте необхідну і достатню умову збіжності знакододатнього ряду.
7. Які є ознаки збіжності знакододатніх рядів? Сформулюйте їх.
8. Який ряд називається знакочергуючим?
9. Сформулюйте ознаку Лейбніца збіжності знакочергуючих рядів.
12. Який ряд називається абсолютно збіжним? умовно збіжним?

Навчальні завдання

Запишіть три перші члени ряду, а також u_{n+1}:(263 - 268)

263. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n}.$

264. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right).$

265. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n-1}\right)^n$

266. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

267. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^3-1}$

268. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

Знайти загальний член ряду(269 - 276).

269. $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}+\ldots$

270. $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\ldots$

271. $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$

272. $\frac{2}{1}+\frac{4}{4}+\frac{8}{9}+\frac{16}{16}+\ldots$

273. $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 10}+\dots$

274. $\frac{2}{1}+\frac{4}{8}+\frac{8}{27}+\frac{16}{64}+\dots$

275. $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{8}+\frac{10}{11}+\dots$

276. $\frac{4}{7}+\frac{9}{10}+\frac{16}{13}+\dots$

Запишіть найпростішу формулу *n*-го члена ряду та перевірте виконання необхідної умови збіжності ряду(277 - 280).

277. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots$

278. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\dots$

279. $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\dots$

280. $\frac{5}{2}+\frac{8}{4}+\frac{11}{8}+\frac{14}{16}+\dots$

Довести, що даний ряд збіжний, і знайти його суму. Вказати, скільки членів ряду необхідно взяти, щоб наближено обчислити його суму з точністю до: а) 0,1; б) 0,01; в) 0,001 (281 - 286).

281. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\dots$

282. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\dots$

283. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\dots$

284. $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\dots$

285. $\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\dots$

286. $\frac{6}{1\cdot 3}+\frac{6}{2\cdot 4}+\frac{6}{3\cdot 5}+\dots$

Дослідити на збіжність ряд за ознакою Даламбера (287 - 294).

287. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\dots$

288. $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\dots$

289. $1+\frac{4}{2!}+\frac{9}{3!}+\frac{64}{4!}+\dots$

290. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{18}}+\frac{9}{\sqrt{81}}+\frac{13}{\sqrt{324}}+\dots$

291. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{n!}.$

292. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}.$

293. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}.$

294. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}.$

Використовуючи ознаку Коші, дослідити на збіжність ряд (295 - 300).

295. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{3n}$

296. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$

297. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$

298. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{2n}$

299. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{5n}$

300. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n 2}{2^n}$

Використовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідити на збіжність ряд (301 - 308)

301. $\frac{1}{1}+\frac{5}{4}+\frac{8}{6}+\ldots+\frac{3n-1}{2n}+\ldots$

302. $\frac{1}{6}+\frac{2}{9}+\frac{3}{14}+\ldots+\frac{n}{n^2+5}+\ldots$

303. $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{2n^2+1}+\ldots$

304. $\frac{1}{5}+\frac{1}{17}+\frac{1}{37}+\ldots+\frac{1}{4n^2+1}+\ldots$

305. $\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{13}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n+1}}+\ldots$

306. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n^2-n}+\ldots$

307. $\frac{4}{2}+\frac{8}{4}+\frac{13}{6}+\ldots+\frac{n^2+4}{2n}+\ldots$

308. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

Використовуючи ознаку порівняння, дослідити на збіжність ряд (309-312).

309. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$

310. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7}$

311. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)\cdot 3^n}$

312. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд (313 - 318).

313. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

314. $-\frac{1}{8}+\frac{2}{27}-\frac{3}{64}+\frac{4}{125}-\ldots$

315. $-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\ldots$

316. $\frac{1}{6}-\frac{2}{36}+\frac{6}{216}-\frac{24}{1296}+\ldots$

317. $\frac{\ln 5}{5}-\frac{\ln 7}{15}+\frac{\ln 9}{25}-\frac{\ln 11}{35}+\ldots$

318. $\frac{1}{47}-\frac{3}{97}+\frac{5}{147}-\frac{7}{197}+\ldots$

Завдання для самостійної роботи

319. Дослідити на збіжність ряд за ознакою Даламбера

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3^2}+\frac{3}{2\cdot 3^3}+\frac{4}{2\cdot 3^4}+\ldots .$$

320. Використовуючи ознаку Коші, дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n-1}\right)^n$.

321. Використовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\frac{1}{n^4}+\ldots .$$

322. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд

$$-\frac{5}{4}+\frac{5}{7}-\frac{5}{10}+\frac{5}{13}-\ldots .$$

§ 2. *СТЕПЕНЕВІ РЯДИ*

1.1. Основні поняття . Теорема Абеля

Якщо по певном правил чи закону кожном натуральному числу n ставиться у відповідність функція $f(x)$, яка визначена на множині A, то говорять, що на множині A визначена ***функціональна послідовність*** $\{f_n(x)\}$.

Якщо $\{f_n(x)\}$ – функціональна послідовність, то суму вигляду

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots \tag{3}$$

називають ***функціональним рядом***.

При конкретному значенні $x=x_0$ функціональний ряд перетворюється у числовий ряд.

Функціональний ряд вигляду

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots. \tag{4}$$

де $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ сталі коефіцієнти називається ***степеневим рядом***.

Ряд (4) у разі потреби будемо записувати у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Зрозуміло, що степеневий ряд буде обов′язково збіжним у точці $x=0$.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (1) є збіжним в точці $x=x_0$, то він буде абсолютно збіжним при всіх x таких, що $|x|<|x_0|$. Якщо степеневий ряд (4) є розбіжним в точці $x=x_1$, то він буде розбіжним при всіх x таких, що $|x|>|x_1|$.

Зауваження. На основі теореми Абеля можна стверджувати, що для степеневого ряду (1) існує інтервал $(-R;R)$, на якому цей ряд збіжний абсолютно. За межами відрізка $[-R;R]$ ряд (4) буде розбіжним. В принципі число R може бути рівним 0, тоді ряд збіжний лише в точці 0. Якщо $R=\infty$, то ряд (4) збіжний на всій множині дійсних чисел.

Інтервал $(-R;R)$ називають ***інтервалом збіжності*** степеневого ряду (4), якщо на цьому інтервалі ряд збіжний, а за межами відрізка $[-R;R]$ – розбіжний. При цьому число R називають ***радіусом збіжності*** степеневого ряду.

В самих точках $-R$ і R ряд може бути як збіжним так і розбіжним. Це питання розглядається окремо.

Розглянемо спосіб визначення радіуса збіжності степеневого ряду. Складемо ряд із модулів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n x^n \right|.$$

Припустимо, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n\cdot x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = D, |x|\neq 0$.

Згідно з ознакою Даламбера ряд (4) є абсолютно збіжним при $D|x|<1$, або $|x|<\frac{1}{D}$, і розбіжним при $D|x|>1$, або $|x|>\frac{1}{D}$. Тому інтервал $\left(-\frac{1}{D};\frac{1}{D}\right)$ є інтервалом абсолютної збіжності ряду (4), а число

$$R=\frac{1}{D}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$ – його радіусом збіжності.

Якщо $D=0$, то $D|x|=0<1$ для $x\in R$, і ряд (4) збіжний на всій числовій прямі. У цьому випадку вважають $R\to+\infty$. Якщо ж $D\to\infty$, то $R=0$.

У випадку використання ознаки Коші для абсолютної збіжності числових рядів, то отримаємо формулу:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Приклад 1. Знайти інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку його радіус збіжності $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

За умовою

$$a_n=\frac{1}{n+\sqrt{n}} \text{ і } a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)+\sqrt{n+1}}.$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+\sqrt{n}}:\frac{1}{(n+1)+\sqrt{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}{\frac{n}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|=1$$

Звідси маємо, що ряд буде збіжним на інтервалі (-1; 1); розбіжним за його межами. Щоб дати відповідь на питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу проведемо додаткові дослідження.

Нехай x = -1, тоді маємо числовий ряд:

$$\frac{1}{1+\sqrt{1}}-\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}+\ldots.$$

Цей ряд є знакочергуючим, тому використаємо ознаку Лейбніца. Для цього ряду $u_n=\frac{1}{n+\sqrt{n}};\quad u_{n+1}=\frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}}$.

Оскільки

1) $\frac{1}{n+\sqrt{n}}>\frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}}\Rightarrow u_n>u_{n+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}=0$, то ряд збіжний і точка *x* = -1 належить інтервалу збіжності.

Нехай x = 1, тоді маємо числовий ряд:

$\dfrac{1}{1+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$.

Це знакододатній числовий ряд, застосуємо для нього ознаку порівняння. Оскільки $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\geq\dfrac{1}{2n}$, а числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – гармонічний, а отже розбіжний, то і даний числовий ряд буде розбіжним, а отже точка x = 1 не належить інтервалу збіжності.

Тому степеневий ряд буде збіжним при *x* $x\in[-1;1)$.

Приклад 2. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.

Розв'язання. Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}.$$

Цей ряд знакододатній. Отже, можна застосувати до нього ознаку Даламбера (при цьому *x* будемо вважати за деякий параметр):

$$|u_n(x)|=\frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n};\ |u_{n+1}(x)|=\frac{\sqrt{n+1}}{|x-2|^{n+1}};$$

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{1}{|x-2|}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{|x-2|}\sqrt{1+\frac{1}{n}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x-2|}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{|x-2|}.$$

За ознакою Даламбера цей ряд буде збігатись, якщо

$$\frac{1}{|x-2|}<1\Leftrightarrow|x-2|>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2>1\\x-2>-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x<1,\end{array}\right.$$

і розбіжним, якщо:

$$\frac{1}{|x-2|}>1\Leftrightarrow<1\Leftrightarrow\begin{cases}x-2<1\\x-2>-1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<3.$$

Залишається дослідити ряд на збіжність у точках $x=1$ і $x=3$. При $x=1$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$, а при $x=3$ — ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}$. Ці ряди розбіжні, бо очевидно, що для них не виконується необхідна умова збіжності. Отже, областю збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}$ буде $x\in(-\infty;\ 1)\cup(3;\ \infty)$. У цій області ряд збігається абсолютно.

1.2. Ряд Тейлора

Розглянемо питання про представлення функції у вигляді степеневого ряду. Допустимо, що функцію $f(x)$ можна представити у такому вигляді:

$$f(x) = a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$$

Нехай інтервал $(a-R;R+a)$ буде інтервалом збіжності цього ряду. Тоді $f(a)= a_0$; оскільки $f'(x) = a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\ldots+na_n(x-a)^{n-1}+\ldots,$ то $f'(a)=a_1$. Аналогічно можна одержати, що $f''(a)=2\,a_2,\ldots,$ $f^{(n)}(a)=n!\,a_n$. Тобто

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots.+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (5)$$

Цей ряд називають ***рядом Тейлора.***

Отже, якщо функцію можна представити у вигляді степеневого ряду, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора для даної функції.

Якщо функція $f(x)$ має похідну будь-якого порядку на інтервалі $(a-R;R+a)$, при чому існує таке число M, що при будь-якому $x\in(a-R;R+a)$ виконується нерівність $f^{(n)}(x)\le M$, то на цьому інтервалі функцію $f(x)$ можна представити у вигляді ряду Тейлора.

Ряд Тейлора для $a=0$ називають ***рядом Маклорена*** і записують

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots.+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (6)$$

Розклад деяких функцій у ряд Маклорена

I. $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots.$

II. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$

III. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$

IV. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots.$

V. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$

- біном Ньютона.

1.3. Наближені обчислення за допомогою рядів

Обчислення значень тригонометричних функцій. Щоб обчислити наближені значення sin *x* та cos *x*, користуються рядами

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

або

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

При будь-якому фіксованому значенню x ці ряди є знакозмінними рядами лейбніцевого типу, тому для забезпечення заданої точності користуються нерівністю

$$|r_n(x_0)| \le u_{n+1}.$$

Приклад 3. Обчислити $\cos 10^\circ$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання. Рівність $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ виконується, якщо під x розуміти радіанну міру кута. Тому переведемо градусну міру кута в радіанну:

$$x = 10^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 10 = \frac{\pi}{18}.$$

$$\cos 10^\circ = \cos\frac{\pi}{18} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^6}{6!} + \ldots$$

Обчислюємо послідовно значення модулів членів ряду:

$$u_1 = 1;$$

$$u_2 = \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!} \approx \frac{3{,}142^2}{648} \approx 0{,}0152;$$

$$u_2 = \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!} \approx \frac{3{,}142^4}{18^4 \cdot 24} \approx \frac{1}{15000} \langle\ 0{,}0001.$$

Отже, для забезпечення точності відповідно до оцінки в ряді досить взяти два перші члени, тобто

$$\cos 10^\circ \approx 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!} \approx 1 - 0{,}0152 = 0{,}9848.$$

Обчислення логарифмів. Розглянемо ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Коефіцієнти цього ряду спадають досить повільно. Крім того, можна використовувати тільки для чисел виду $a = 1 + x$, які лежать в інтервалі (0;2). Тому для більш зручнішого обчислення логарифмів використовують рівність

при $x = \frac{1}{2n+1}$

$$\ln(1+x) = \ln n + 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k+1}} + \ldots\right).$$

Приклад 4. Обчислити $\ln 2$, взявши два перших члена ряду.

Розв'язання. З формули

$$\ln(1+x)=\ln n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k+1}}+\ldots\right)$$

при n=*1* знаходимо

$$\ln 2=\ln 1+2\left(\frac{1}{2\cdot 1+1}+\frac{1}{3(2\cdot 1+1)^3}+\ldots\right).$$

$$\ln 2=\frac{2}{3}+\frac{2}{3\cdot 3^3}\approx 0{,}6667+0{,}0247=0{,}6914.$$

Обчислення коренів. Для обчислення коренів користуються біноміальним рядом

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

$x\in(-1;1)$.

Приклад 5. Обчислити $\sqrt[5]{36}$ з точністю 0,001.

Розв'язання. Подамо заданий корінь у вигляді

$$\sqrt[5]{36}=\sqrt[5]{32+4}=2\sqrt[5]{1+\frac{1}{8}}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Тоді $\alpha=\frac{1}{5},\quad x=\frac{1}{8}.$

Маємо

$$\sqrt[5]{36}=2\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{8}\right)^2+\ldots\right)=2+\frac{2}{5\cdot 8}-\frac{2\cdot 4}{2!5^2 8^2}+\ldots$$

Дістали ряд лейбніцевого типу. Обчислимо члени ряду за модулем:

$$\mathrm{u}_1=2,\ \mathrm{u}_2=\frac{1}{20},\ \mathrm{u}_3=\frac{2\cdot 4}{2!5^2 8^2}=\frac{1}{400},\quad \mathrm{u}_4<0{,}001.$$

Отже,

$$\sqrt[5]{36}=2+\frac{1}{20}-\frac{1}{400}=2{,}0475\approx 2{,}048.$$

Обчислення інтегралів. Якщо підінтегральна функція у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ неперервна на відрізку $[a;b]$, але її первісна $F(x)$ не є елементарною функцією, то формула Ньютона – Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

не дає змоги обчислити цей інтеграл. Якщо функцію *f(x)* можна розкласти в степеневий ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

який рівномірно збігається до *f(x)* на відрізку $[a;b]$, то, користуючись теоремою про почленне інтегрування ряду, маємо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1 x dx + \int_a^b a_2 x^2 dx + \int_a^b a_3 x^3 dx + \ldots + \int_a^b a_n x^n dx + \ldots. =$$

$$= a_0(b-a) + \frac{1}{2}a_1\left(b^2 - a^2\right) + \ldots + \frac{a_n}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right) + \ldots$$

Обчисливши з потрібною точністю суму ряду, одночасно з тією самою точністю знайдемо і значення визначеного інтеграла.

Приклад 6. Обчислити інтеграл $F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Розв'язання. У теорії ймовірностей важливу роль відіграє функція $F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, яку називають *функцією Лапласа.* Обчислити значення цієї функції точно не можна, бо $\int e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ не виражається через елементарні функції.

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^5}{2^2\, 2!5} - \frac{x^7}{2^3 3!7} + \ldots, \quad x \in (-\infty;+\infty).$$

Тоді

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^5}{2^2\, 2!5} - \frac{x^7}{2^3 3!7} + \ldots\right), \quad x \in (-\infty;+\infty).$$

Нехай нам треба обчислити $F\left(\frac{1}{2}\right)$ з точністю до 0, 001.

При $x = \frac{1}{2}$ дістаємо

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^4\cdot 3} + \frac{1}{2^7\, 2!5} - \frac{1}{2^{10} 3!7} + \ldots\right).$$

У дужках маємо ряд лейбніцевого типу. Тому послідовно обчислюємо модулі його членів:

$$u_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5, \qquad u_2 = \frac{1}{2^4\cdot 3} = 0{,}0208, \qquad u_3 = \frac{1}{2^7 2!\cdot 5} = 0{,}0007 \langle\ 0{,}001.$$

Отже,

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3{,}1415}}(0{,}5 - 0{,}0208) \approx 0{,}5205 \approx 0{,}52.$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{0.5} x\cdot\sin\sqrt{x}dx$ з точністю до 0.0001 за допомогою розкладання підінтегральної функції в ряд і його почленного інтегрування.

Розв'язання. Запишемо спочатку розклад у ряд функції $f(x)=\sin x$:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+....$$

Тому $\sin\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{1!}-\frac{\sqrt{x}^3}{3!}+\frac{\sqrt{x}^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{(\sqrt{x})^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$, а

$$x\sin\sqrt{x}=\frac{x\sqrt{x}}{1!}-\frac{x^2\sqrt{x}}{3!}+\frac{x^3\sqrt{x}}{5!}-\frac{x^4\sqrt{x}}{7!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n\sqrt{x}}{(2n-1)!}+... .$$

Проінтегруємо обидві частини одержаної рівності.

$$\int\limits_{0}^{0,5} x\sin\sqrt{x}dx=\int\limits_{0}^{0,5}\left(\frac{x\sqrt{x}}{1!}-\frac{x^2\sqrt{x}}{3!}+\frac{x^3\sqrt{x}}{5!}-\frac{x^4\sqrt{x}}{7!}...+(-1)^{n-1}\frac{x^n\sqrt{x}}{(2n-1)!}+...\right)dx$$

$$\int\limits_{0}^{0,5} x\sin\sqrt{x}dx=\left.\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right|_0^{0,5}-\left.\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{42}\right|_0^{0,5}+\left.\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{1080}\right|_0^{0,5}-\left.\frac{2x^{\frac{11}{2}}}{55440}\right|_0^{0,5}+...=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2^2\sqrt{2}}-\frac{1}{21}\cdot\frac{1}{2^3\sqrt{2}}+\frac{1}{540}\cdot\frac{1}{2^4\sqrt{2}}-\frac{1}{27720}\cdot\frac{1}{2^5\sqrt{2}}...=$$

$$=\frac{1}{10\sqrt{2}}-\frac{1}{168\sqrt{2}}+\frac{1}{8640\sqrt{2}}-\frac{1}{887040\sqrt{2}}+...$$

Оскільки четвертий доданок менший за 0,0001, то для наближеного обчислення вказаного інтеграла з точністю до 0,0001 достатньо взяти три перших доданки.

$$\int\limits_{0}^{0,5} x\sin\sqrt{x}dx\approx\frac{864-51+1}{8640\sqrt{2}}=\frac{814}{8640\sqrt{2}}\approx 0,0666$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називають функціональним рядом?
2. Сформулюйте критерій рівномірної збіжності.
3. Що таке область збіжності функціонального ряду?
4. Який функціональний ряд називають збіжним? рівномірно збіжним? абсолютно збіжним?
5. Сформулюйте теорему Абеля.
6. Що називають інтервалом збіжності степеневого ряду?
7. За якою формулою знаходиться інтервал збіжності степеневого ряду?
8. Записати ряд Тейлора .
9. Сформулюйте теорема про розклад функції в ряд Тейлора.

10. Як обчислити наближене значення тригонометричних функцій?
11. За якою формулою виконується наближене обчислення логарифмів?
12. Який ряд використовують для наближеного обчислення коренів?
13. Як здійснюють наближене обчислення інтегралів?

Навчальні завдання

Записати формулу *n-го* члена степеневого ряду(333 - 340).

333. $\frac{3x}{5\cdot\sqrt[3]{2}}+\frac{9x^2}{25\cdot\sqrt[3]{3}}+\frac{27x^3}{125\cdot\sqrt[3]{4}}+\cdots$

334. $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}-\frac{x^4}{\sqrt{4}}\cdots$

335. $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{27}+\frac{x^4}{64}+\cdots$

336. $\frac{\sqrt{2}x}{3}+\frac{\sqrt{4}x^2}{9}+\frac{\sqrt{8}x^3}{27}+\cdots$

337. $\frac{2x}{3\cdot 3}+\frac{4x^2}{9\cdot 4}+\frac{8x^3}{27\cdot 5}+\cdots$

338. $1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{9\cdot 3}+\frac{x^3}{27\cdot 4}+\cdots$

339. $1+\frac{2x}{9\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{25\sqrt{9}}+\frac{8x^3}{49\sqrt{27}}+\cdots$

340. $1+\frac{2x}{3^2\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}}+\frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}}+\ldots$

Знайти область збіжності функціонального ряду(341 - 344)

341. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+4}+\frac{3}{x+9}+\ldots;$

342. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3}+\frac{24}{x^4}+\cdots\;;$

343. $\frac{5}{2^5\cdot x^2}+\frac{7}{3^5\cdot x^4}+\frac{9}{4^5\cdot x^6}+\cdots\;;$

344. $\frac{2^5\cdot x^2}{3(x+1)}+\frac{3^5\cdot x^4}{5(x+1)^2}+\frac{4^5\cdot x^6}{7(x+1)^3}+\cdots\;;$

Записати три перших члени степеневого ряду. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити його збіжність на кінцях інтервалу (345 - 353).

345. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{2^n}$

346. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

347. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{6^n}$

348. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{6^n+3^n}$

349. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{3^n(n+2)}$

350. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$

351. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n(n+1)}$

352. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt{n}x^n}{4^n}$

353. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^n}{(n+1)^n}$

354.Обчислити з точністю до 0,001:

а) sin 10º; б) cos 18º; в) ln 3; г) $\sqrt[5]{33}$.

Обчислити даний інтеграл з точністю до 0.001 за допомогою розкладання підінтегральної функції в ряд і його почленного інтегрування.

355. $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$

356. $\int_0^{0.1}\cos(10x^2)dx$

357. $\int_0^{0.4}e^{-5x^2}dx$

358. $\int_0^{0,5} \frac{\ln(x+1)}{x^3} dx$ 359. $\int_0^1 x^{10} \sin x dx$ 360. $\int_0^1 x\cos\sqrt{x} dx$

Завдання для самостійної роботи

Записати три перших члени степеневого ряду. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити його збіжність на кінцях інтервалу.

361. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 362. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$ 363. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^{n-1} n}$

Обчислити даний інтеграл з точністю до 0.001 за допомогою розкладання підінтегральної функції в ряд .

364. $\int_0^{0,2} \frac{\sin 5x}{x} dx$ 365. $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$ 366. $\int_0^{0.5} e^{-4x^2} dx$

367. Обчислити з точністю до 0,0001:

а) sin 18º; *б) ln 5;* *в)* $\sqrt[3]{83}$.

Індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів по модулю «Диференціальні рівняння. Ряди»

1. Знайти загальний розв′язок диференціального рівняння.

1) $ydx + xdy = 0$;
2) $(y-1)^2 dx + (1-x)^3 dy = 0$;
3) $x\sqrt{9-y^2}dx - y(4+x^2)dy = 0$;
4) $\cos x \cos ydx - \sin x \sin ydy = 0$;
5) $\ln x \sin^3 ydx + x\cos ydy = 0$;
6) $(xy^2 - y^2)dx - (x^2 y + x^2)dy = 0$;
7) $xdy - y\ln ydx = 0$;
8) $3x^2(y+1)dx + (x^3+1)dy = 0$;
9) $3x^2\sqrt{1-y^2}dx + e^{x^3}dy = 0$;
10) $y^2 dx + xdy = 0$;
11) $2x^2 ydy + (y^2-2)dx = 0$;
12) $\ln\cos ydx + xtgydy = 0$;
13) $(y+2)dx + dy = 0$;
14) $(2y+1)ctgxdx - dy = 0$;
15) $(3x+1)ydx + 2dy = 0$;
16) $(x - xy^2)dx - (y - yx^2)dy = 0$;
17) $4xydx + (x^2+1)dy = 0$;
18) $(x^2+16)dy + (y-7)dx = 0$;
19) $(y^3+1)dx + 2xy^2 dy = 0$;
20) $tgxdy - y\ln ydx = 0$;
21) $(y^2+9)dx - \cos^2 xdy = 0$;
22) $2\sqrt{x}\cos ydy - 9dx = 0$;
23) $10dx + \sin y\sqrt{4-x^2}dy = 0$;
24) $\sqrt{1-y^2}\cos xdx - 5dy = 0$.
25) $dx + (y+7)\cos^2 xdy = 0$;
26) $\sqrt{y}\cos xdx + dy = 0$;
27) $(x+7)dy + (y^2+1)dx = 0$;
28) $\sin ydx + \sqrt{x^2-4}\cos ydy = 0$;

29) $x^2dy-(2xy+3y)dx=0$; 30) $(y^2+1)dx-\sqrt{x}dy=0$.

2. Розв′язати диференціальне рівняння, використовуючи методи Лагранжа чи Бернуллі.

1) $xy'=x^3+y$; 2) $y'=e^{2x}-e^xy$; 3) $xy'+9y=\frac{8}{x}$;

4) $y'x+y-e^x=0$; 5) $y'x+2y=x^3$; 6) $y'-y=e^x$;

7) $7y'-4xy=7x$; 8) $y'-2y=e^{2x}$; 9) $xy'+y=x^2e^{\frac{x}{2}}$;

10) $xy'-4y=x+1$; 11) $xy'-y=x+1$; 12) $y'\cos x+y\sin x=1$;

13) $y'-\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2}$; 14) $y'+y=x$; 15) $y'+3y=14e^{4x}$;

16) $xy'-3y=x^3+1$; 17) $y'-2xy=x$; 18) $y'=x-\frac{2y}{x}$;

19) $y'-2y=e^{2x}$; 20) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x^2+1}$; 21) $y'+2yctgx=\frac{1}{\sin x}$;

22) $xy'-2y=2x^4$; 23) $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$; 24) $xy'-x^2+2y=0$;

25) $y'+xy=x$; 26) $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2$; 27) $y'=-\frac{x+y}{x}$;

28) $y'-yctgx=\sin x$; 29) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x^2}$; 30) $y'-\frac{3y}{x}=e^xx^3$.

3. Знайти загальний розв′язок диференціального рівняння.

1) $(x-\cos y)dx+(x\sin y+\cos y)dy=0$; 2) $(y^2-e^x\cos y)dx+(2xy+e^x\sin y)dy=0$;

3) $(x^2+y-ye^x)dx+(x+2y-e^x)dy=0$; 4) $\left(4-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy=0$;

5) $\left(2x\ln y-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx+\left(\frac{x^2}{y}-\sin y\right)dy=0$; 6) $\left(y^3-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}+3xy^2+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)dy=0$;

7) $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$; 8) $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$;

9) $(x\cos 2y+1)dx+(-x^2\sin 2y)dy=0$; 10) $\left(\ln\frac{x}{y}+1\right)dx-\frac{x}{y}dy=0$;

11) $\left(y+\frac{1}{x}\right)dx+\left(\frac{1}{y}+x\right)dy=0$;

12) $\frac{2x}{x^2+y^2}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy=0$;

13) $2x\cos 4y dx-4x^2\sin 4y dy=0$;

14) $2e^{2x-3y}dx+\left(2y-3e^{2x-3y}\right)dy=0$;

15) $\left(\frac{x}{x^2+1}-y\right)dx-xdy=0$;

16) $\left(2x\cos^2 y\right)dx+\left(2y-x^2\sin 2y\right)dy=0$;

17) $\frac{y}{\cos^2 xy}dx+\frac{x}{\cos^2 xy}dy=0$;

18) $\left(\frac{2}{2x+y^2}+1\right)dx+\left(\frac{2y}{2x+y^2}+3y^2\right)dy=0$;

19) $(12xy+\sin y)dx+\left(6x^2+x\cos y\right)dy=0$;

20) $\left(3y^3-y\sin x\right)dx+\left(9xy^2+\cos x\right)dy=0$;

21) $\left(\frac{4x}{x^2+3}-8y\right)dx-8xdy=0$;

22) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right)dy=0$;

23) $\left(1+1{,}5\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx+\left(1{,}5\sqrt{\frac{x}{y}}-3\right)dy=0$;

24) $\left(\ln y+\frac{y^2}{x}\right)dx+\left(\frac{x}{y}+2y\ln x\right)dy=0$;

25) $-\frac{2y\ln y}{x^3}dx+\frac{\ln y+1}{x^2}dy=0$;

26) $\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+4y\cos 2x\right)dx+\left(2\sin 2x+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)dy=0$;

27) $\left(tgy-3x^2y^2\right)dx+\left(\frac{x}{\cos^2 y}-2yx^3\right)dy=0$;

28) $-\frac{1}{y}tg\frac{x}{y}dx+\frac{x}{y^2}tg\frac{x}{y}dy=0$;

29) $\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+y\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)dy=0$;

30) $2xy^4dx+\left(4x^2y^3+\cos y\right)dy=0$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1) $y''=\sin\frac{x}{2}$;

2) $y''=\cos 3x$;

3) $y'''=e^{-2x}$;

4) $y'''=5x^4-2x^3+x^2$;

5) $y''=\ln x$;

6) $y'''=\sin 3x$;

7) $y'''=2e^{\frac{x}{4}}$;

8) $y'''=2x^4-\sqrt[5]{x^3}+7$;

9) $y''=\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$;

10) $\sqrt{1-x^2}\,y''-1=0$;

11) $y'''=\sin x$;

12) $y'''=\frac{1}{x^3}$;

13) $y'''=27e^{3x}+120x^3$;

14) $y''=\sin x+x$;

15) $y'''=\frac{1}{4\sqrt{x}}$;

16) $y'''=\cos\frac{x}{5}$;

17) $xy''=1+x^2$;

18) $y'''=x^2e^{3x}$;

19) $y''=x\sin 5x$;

20) $y'''=2x^3-3^x$;

21) $y''=\cos^2 x$;

22) $\left(1+x^2\right)y''-1=0$;

23) $y''=\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$;

24) $y''\sin^2 x=1$;

25) $y''' \sin^4 x = \sin 2x$; 26) $x^2 y'' = 2\sqrt{x} - x^3$; 27) $y'' = 27e^{3x} + 120x^3$;

28) $y'' \cos^3 x = 3\sin x$; 29) $y'' = x\cos 2x$; 30) $y'' = \sin^2 x$.

5. Знайти загальний розв′язок диференціального рівняння.

1) $y'' = 2 - y$; 2) $y'' = -y$; 3) $y'' y^3 = -1$;

4) $4y'' = y'$; 5) $9y'' - y = 0$; 6) $y'' tgy = 2(y')^2$;

7) $2yy'' = 1 + (y')^2$; 8) $(3y+4)y'' - 3(y')^2 = 0$; 9) $16y'' = 9y$;

10) $yy'' - (y')^2 = 0$; 11) $y^3 y'' = -1$; 12) $2yy'' + (y')^2 = 0$;

13) $25y'' = y$; 14) $(y+1)y'' = (y')^2$; 15) $y'' = y^{-1}(y')^2$;

16) $y'' = y^{-1}(y')^2$; 17) $y^2 - yy'' = 0$; 18) $2y'' = 3(y')^2$;

19) $yy'' = (y')^2 + y^2 y'$; 20) $y'' = \dfrac{8}{y^3}$; 21) $y'' = 5y'$;

22) $yy'' + (y')^2 = 1$; 23) $(y-1)y'' - 2(y')^2 = 0$; 24) $2yy'' - (y')^2 = 1$;

25) $y'' - 7y' = 0$; 26) $yy'' = (y')^2$; 27) $yy'' - (y')^2 = y^2$;

28) $y''(y-1) - 2(y')^2 = 0$ 29) $y'' = 2yy'$; 30) $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.

6. Знайти загальний розв′язок диференціального рівняння.

1) $y'' + y' tgx = \sin 2x$; 2) $y'' - 2ctgx y' = \sin^3 x$; 3) $2xy'y'' = (y')^2 + 1$;

4) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$; 5) $xy'' - y' = x^2 e^x$; 6) $y''(x^2+1) = 2xy'$;

7) $xy'' + y' = x^4$; 8) $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$; 9) $y'' ctgx + y' = 2$;

10) $(1+x^2)y'' = 2xy'$; 11) $xy'' + y' = \ln x$; 12) $(1-x^2)y'' - xy' = 2$;

13) $x^2 y'' + xy' = 1$; 14) $xy'' - \dfrac{1}{4}y' = 0$; 15) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$;

16) $y'' = \dfrac{y'}{x}$; 17) $(1-x^2)y'' - 2xy' = 2$; 18) $y'' = 2 - \dfrac{y'}{x}$;

19) $xy'' - y' = 0$; 20) $xy'' = y' + x^2 \sin x$; 21) $xy'' - \dfrac{1}{4}y' = 0$;

22) $\sqrt{1-x^2}\,y''-1=0$; 23) $xy''+y'=2x$; 24) $y''=\dfrac{y'}{x}+x$;

25) $x^2y''+xy'=1$; 26) $xy''-y'=2x^2-7x$; 27) $(x-3)y''+y'=0$;

28) $(y''x-y')y'=x^3$; 29) $y''=\dfrac{y'}{x}+x$; 30) $(x+6)y''+xy'=y'$.

7. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови.

1) $y''+10y'+25y=-36e^{-2x}$, $y(0)=-2,\ y'(0)=0$;

2) $y''+4y'+4y=16x^2+48x+12$, $y(0)=-2,\ y'(0)=0$;

3) $y''-2y'+y=-2x^2+11x-12$, $y(0)=-2,\ y'(0)=7$;

4) $y''+5y'+4y=-65\cos 3x+5\sin 3x$, $y(0)=8,\ y'(0)=-31$;

5) $y''+7y'+12y=-30e^{2x}$, $y(0)=3,\ y'(0)=6$;

6) $y''-6y'+9y=-108e^{-3x}$, $y(0)=-2,\ y'(0)=13$;

7) $y''+3y'-4y=-4e^{-3x}$, $y(0)=6,\ y'(0)=-18$;

8) $y''+8y'+16y=-36e^{-x}$, $y(0)=0,\ y'(0)=-15$;

9) $y''+6y'+9y=-54\cos(-3x)+72\sin(-3x)$ $y(0)=7,\ y'(0)=-16$;

10) $y''+y'-2y=6x^2$, $y(0)=-4,\ y'(0)=-1$;

11) $y''-2y'+y=8e^{x}$, $y(0)=1,\ y'(0)=3$;

12) $y''+8y'+16y=-96\cos 4x-32\sin 4x$ $y(0)=4,\ y'(0)=-25$;

13) $y''+3y'-4y=8x^2-5$, $y(0)=4,\ y'(0)=-17$;

14) $y''+2y'+5y=4e^{-x}$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$;

15) $y''+6y'+9y=10\sin x$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$;

16) $y''+5y'+4y=12x^2+42x+9$, $y(0)=-4,\ y'(0)=-2$;

17) $y''-2y'+17y=-51x^2-56x+19$, $y(0)=1,\ y'(0)=12$;

18) $y''-4y'+13y=26e^{4x}$, $y(0)=6,\ y'(0)=28$;

19) $y''+4y'+5y=10x^2+21x+18$, $y(0)=6,\ y'(0)=-4$;

20) $y''+9y=\cos 3x$, $y(0)=1,\ y'(0)=3$;

21) $y''+3y'+2y=6x^2-8x+4$, $y(0)=-2,\ y'(0)=-2$;

22) $y''-5y'+6y=13\sin 3x$, $y(0)=2,\ y'(0)=2$;

23) $y''-2y'+10y=16\cos 4x+12\sin 4x$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$;

24) $y''+4y'+5y=5x^2-32x+5$, $y(0)=2,\ y'(0)=2$;

25) $y''+2y'+5y=40e^{3x}$, $y(0)=4,\ y'(0)=10$;

26) $y''+2y'+5y=-14\cos 3x-8\sin 3x$, $y(0)=4,\ y'(0)=1$;

27) $y'' - 2y' = x^2 - x$, $y(0) = -8,\ y'(0) = -10$;

28) $y'' - y = e^{-x}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;

29) $y'' + 2y' - 8y = -4\cos 2x - 28\sin 2x$, $y(0) = 6,\ y'(0) = 14$;

30) $y'' + 8y' + 16y = -5x^2 - 6x + 9$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 10$.

8. Дослідити на збіжність ряд за ознакою Даламбера.

1) $\frac{1}{10} + \frac{1\cdot 2}{10^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3} + \ldots$;

2) $\frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \ldots$;

3) $1 + \frac{3}{1} + \frac{9}{1\cdot 2} + \frac{27}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$;

4) $\frac{2\sqrt{1}}{1} + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{4\sqrt{3}}{9} + \frac{5\sqrt{4}}{16} + \ldots$;

5) $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \ldots$;

6) $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} + \ldots$;

7) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\left(\sqrt{3}\right)^2} + \frac{5}{\left(\sqrt{3}\right)^3} + \ldots$;

8) $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{24} + \frac{4}{120} + \ldots$;

9) $\frac{1}{e} + \frac{8}{e^2} + \frac{27}{e^3} + \ldots$;

10) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots$;

11) $\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \ldots$;

12) $\frac{3}{1} + \frac{3^2}{4} + \frac{3^3}{9} + \ldots$;

13) $\frac{2}{1} + \frac{4}{4} + \frac{8}{9} + \frac{16}{16} + \ldots$;

14) $\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3^4} + \ldots$;

15) $\frac{1}{3\cdot 2} + \frac{2}{3\cdot 2^2} + \frac{3}{3\cdot 2^3} + \frac{4}{3\cdot 2^4} + \ldots$;

16) $\frac{4}{4} + \frac{4^2}{16} + \frac{4^3}{36} + \ldots$;

17) $\frac{3}{1\cdot 2} + \frac{3^2}{2\cdot 3} + \frac{3^3}{3\cdot 4} + \ldots$;

18) $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^2} + \frac{1}{4\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^4} + \ldots$;

19) $\frac{3}{10\cdot 1^{10}} + \frac{3^2}{10\cdot 2^{10}} + \frac{3^3}{10\cdot 3^{10}} + \ldots$;

20) $\frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \frac{64}{16} + \ldots$;

21) $\frac{1\cdot 2}{3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3^3} + \ldots$;

22) $\frac{6}{1\cdot 3} + \frac{6^2}{2\cdot 4} + \frac{6^3}{3\cdot 5} + \ldots$;

23) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$;

24) $\frac{1}{4} + \frac{1\cdot 2}{4^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4^3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4^4} + \ldots$;

25) $\frac{5}{1} + \frac{5^2}{32} + \frac{5^3}{243} + \ldots$;

26) $1 + \frac{2}{1} + \frac{4}{1\cdot 2} + \frac{8}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$;

27) $\frac{1^4}{4} + \frac{2^4}{16} + \frac{3^4}{64} + \ldots$;

28) $\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$;

29) $\frac{1}{4\cdot 5} + \frac{2}{4\cdot 5^2} + \frac{3}{4\cdot 5^3} + \frac{4}{4\cdot 5^4} + \ldots$;

30) $\frac{2}{3\cdot 2} + \frac{3}{4\cdot 2^2} + \frac{4}{5\cdot 2^3} + \frac{5}{6\cdot 2^4} + \ldots$.

9. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити його збіжність на кінцях інтервалу:

1) $x+\frac{x^2}{20}+\frac{x^3}{300}+\frac{x^4}{40000}+\ldots;$

2) $-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 4}-\frac{x^3}{3\cdot 8}+\frac{x^4}{4\cdot 16}-\ldots;$

3) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{11}+\ldots;$

4) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots;$

5) $\frac{x}{3}+\frac{x^2}{15}+\frac{x^3}{35}+\frac{x^4}{63}+\ldots;$

6) $\frac{x^2}{2}-\frac{2x^4}{4}+\frac{3x^6}{8}-\frac{4x^8}{16}+\ldots;$

7) $\frac{x}{3}+\frac{4x^3}{9}+\frac{9x^5}{27}+\frac{16x^7}{81}+\ldots;$

8) $\frac{4x}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{16x^2}{9\sqrt[3]{6}}+\frac{64x^3}{27\sqrt[3]{10}}+\cdots;$

9) $1+2x^2+4x^4+8x^6+\ldots;$

10) $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots;$

11) $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}-\frac{x^4}{\sqrt{4}}\cdots;$

12) $\frac{3x}{1}+\frac{9x^2}{\sqrt{2}}+\frac{27x^3}{\sqrt{3}}+\cdots;$

13) $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots;$

14) $10x+100x^2+1000x^3+\ldots;$

15) $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{20}+\frac{x^3}{300}+\frac{x^4}{4000}+\ldots;$

16) $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots;$

17) $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\frac{x^4}{4\cdot 5}+\ldots;$

18) $\frac{x}{1}+\frac{x^2\sqrt{2}}{2}+\frac{x^3\sqrt{3}}{6}+\frac{x^4\sqrt{4}}{24}+\ldots;$

19) $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{3\sqrt{2}}+\frac{x^3}{9\sqrt{3}}-\frac{x^4}{27\sqrt{4}}\cdots;$

20) $1+2x+6x^2+24x^3+\ldots;$

21) $\frac{8x}{\sqrt[3]{2}}+\frac{64x^2}{\sqrt[3]{7}}+\frac{512x^3}{\sqrt[3]{12}}+\cdots;$

22) $\frac{3x}{5\sqrt[3]{2}}+\frac{9x^2}{25\sqrt[3]{3}}+\frac{27x^3}{125\sqrt[3]{4}}+\cdots;$

23) $\frac{2x}{3\cdot 3}+\frac{4x^2}{9\cdot 4}+\frac{8x^3}{27\cdot 5}+\cdots;$

24) $\frac{3x}{1}+\frac{9x^2}{\sqrt{2}}+\frac{27x^3}{\sqrt{3}}+\cdots;$

25) $\frac{7x}{4\sqrt[3]{2}}+\frac{49x^2}{16\sqrt[3]{4}}+\frac{343x^3}{64\sqrt[3]{6}}+\cdots;$

26) $-2x^2+4x^4-8x^6+\ldots;$

27) $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{27}+\frac{x^4}{64}+\cdots;$

28) $\frac{8x}{\sqrt[3]{2}}+\frac{64x^2}{\sqrt[3]{7}}+\frac{512x^3}{\sqrt[3]{12}}+\cdots;$

29) $\frac{\sqrt{2}x}{3}+\frac{\sqrt{4}x^2}{9}+\frac{\sqrt{8}x^3}{27}+\cdots;$

30) $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^3}+\ldots.$

10. Обчислити даний інтеграл з точністю до 0.001 за допомогою розкладання підінтегральної функції в ряд і його почленного інтегрування.

1) $\int_0^{0,2}\frac{\sin 5x}{x}dx$; 2) $\int_0^{1}\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$; 3) $\int_0^{0.5}e^{-4x^2}dx$;

4) $\int_0^{0.1}\cos\sqrt{x}dx$; 5) $\int_0^{0.1}\cos(10x^2)dx$; 6) $\int_0^{1}\frac{\sin x}{x}dx$;

7) $\int_0^{0.5}\sqrt{1+x}dx$; 8) $\int_0^{1}x\sin x^2dx$; 9) $\int_0^{0.4}e^{-5x^2}dx$;

10) $\int_0^{1}x\cos\sqrt{x}dx$; 11) $\int_0^{0.2}\cos x^2dx$; 12) $\int_0^{0.5}\cos(2x^2)dx$;

13) $\int_0^{0.3}e^{-2x^2}dx$; 14) $\int_0^{0.5}\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$; 15) $\int_0^{0.5}\frac{\sin 4x}{x}dx$;

16) $\int_0^{0.2}\frac{1-e^{-x}}{x}dx$; 17) $\int_0^{0,5}\frac{\ln(x+1)}{x^3}dx$; 18) $\int_0^{0.5}x^2e^{-x^2}dx$;

19) $\int_0^{0.2}\frac{e^{-x^2}-1}{x}dx$; 20) $\int_{0,1}^{0.2}\frac{e^{-x}}{x^3}dx$; 21) $\int_0^{1}x^{10}\sin xdx$;

22) $\int_0^{1}\frac{\cos x}{x}dx$; 23) $\int_0^{0.5}\frac{\sin 2x}{x}dx$; 24) $\int_0^{0,4}e^{-2,2x^2}dx$;

25) $\int_0^{0.2}\frac{e^{-x}-1}{x}dx$; 26) $\int_0^{0,5}\cos\sqrt{x}dx$; 27) $\int_0^{1}\frac{\ln(x+1)}{x}dx$;

28) $\int_0^{0,6}e^{-0,4x^2}dx$; 29) $\int_0^{0,5}\frac{\cos 4x}{x^2}dx$; 30) $\int_0^{0.2}\cos^2 xdx$.

Д овідковий матеріал

Таблиця похідних елементарних функцій

1. $(C)'=0$
2. $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$
6. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$
7. $(\sin x)'=\cos x$
11. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$

4. $\left(e^x\right)' = e^x$

5. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

8. $(cosx)' = -\sin x$

9. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

10. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

13. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

14. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Таблиця невизначених інтегралів

I. $\int 0dx = C$;

II. $\int dx = x + C$;

III. $\int x^\alpha \mathrm{dx} = \dfrac{\mathrm{x}^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$;

IV. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

V. $\int e^x dx = e^x + C$;

VI. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

VII. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

VIII. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

IX. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

X. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

XI. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$;

XII. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;

XIII. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$;

XIV. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

Методи інтегрування

1. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$.

   а) $\int (ax+b)^n dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$

   б) $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}\ln(ax+b) + C$

2. Заміна змінної $\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt}$ - загальна формула.

   а) $\int R(\ln x)\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \ln x = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \end{matrix}\right\} = \int R(t)dt$;

   б) $\int R(\mathrm{arctg}x)\dfrac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \mathrm{arctg}x = t \\ \dfrac{dx}{1+x^2} = dt \end{matrix}\right\} = \int R(t)dt$

   ;

   в) $\int R(\arcsin x)\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \arcsin x = t \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt \end{matrix}\right\} = \int R$

   г) $\int R\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = a\sin t \text{ или } x = a\cos t \\ dx = a\cos t dt \quad dx = -a\mathrm{si} \end{matrix}\right.$

3. Інтегрування частинами $\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU$.

а) $\int \underbrace{P_n(x)}_{U} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \mathrm{tg} x \\ \mathrm{ctg} x \\ e^x \end{bmatrix} dx}_{dV}$

б) $\int \underbrace{\begin{bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \mathrm{arctg} x \\ \mathrm{arcctg} x \end{bmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{P_n(x) dx}_{dV}$

Властивості логарифмів

1. $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ 2. $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ 3. $n \ln a = \ln(a)^n$ 4. $\ln 1 = 0$

Значення тригонометричних функцій деяких кутів

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	***0***	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	***1***	***0***
$\cos\alpha$	***1***	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	***0***	***-1***
$tg\alpha$	***0***	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	***1***	$\sqrt{3}$	***Не існує***	***0***
	Не існує	$\sqrt{3}$	***1***	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	***0***	***Не існує***

Формули додавання

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos$	$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x$	$tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm t}{1 \mp tgx}$

Формули подвійного кута

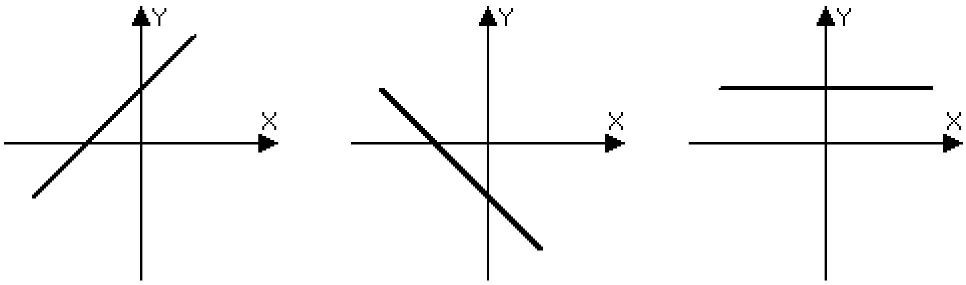
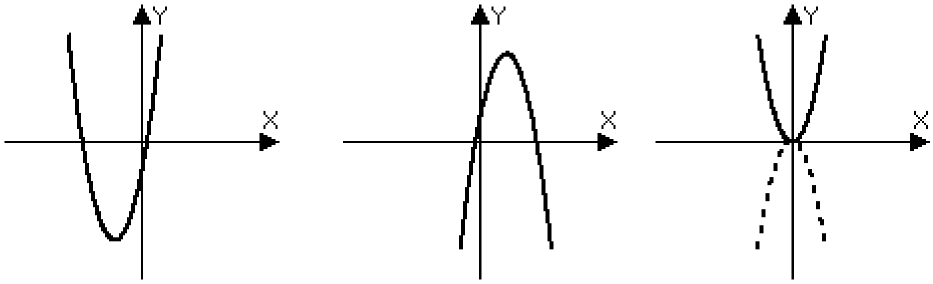
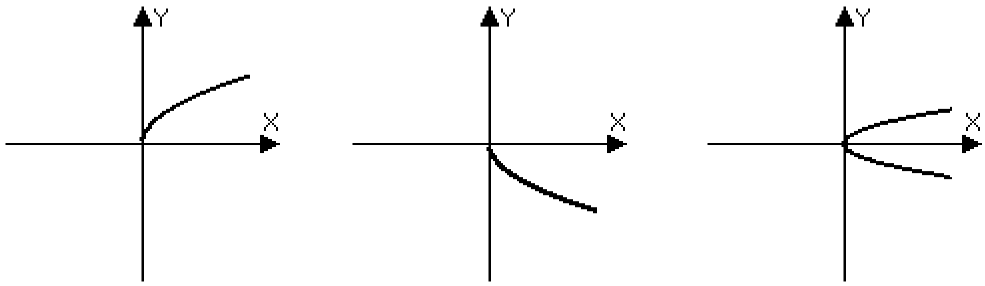
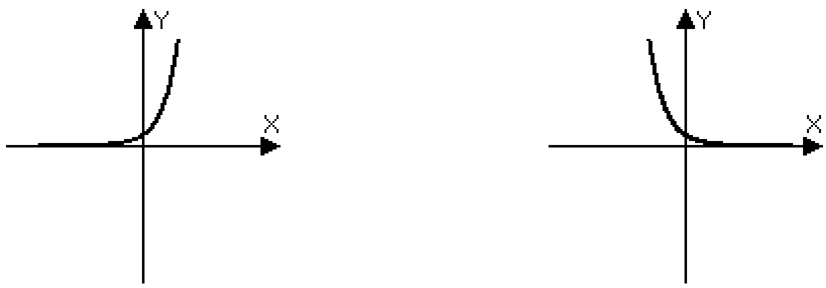
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$	$tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$

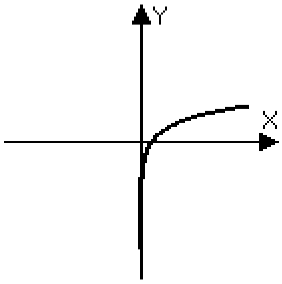
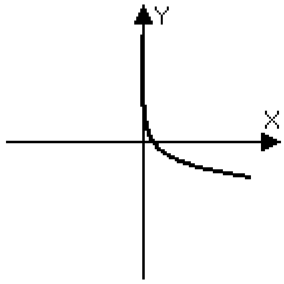
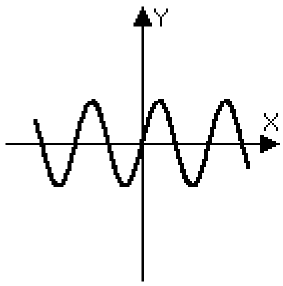
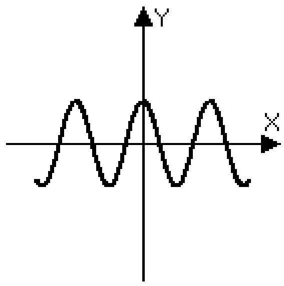
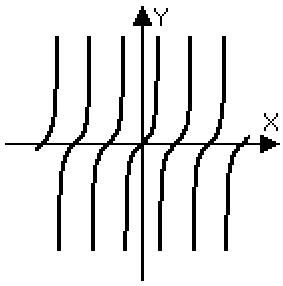
Перетворення суми в добуток

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos$	$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos$	$tgx + tgy = \frac{\sin(x+}{\cos x c}$
$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos$	$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin$	$tgx - tgy = \frac{\sin(x-}{\cos x c}$

Перетворення добутку в суму

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$	$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$	

	Графіки деяких елементарних функцій *(схематичний рисунок)*
$y = kx + b$ – *графік – пряма*	$k>0$ *k<0* *k=0 [y=b]* 
$y = ax^2 + bx + c$ *графік – парабола*	*a>0* *a<0* *a>0* $[y = ax^2]$ *a<0* 
$y = ax^3$ *графік – кубічна парабола*	*a>0* *a<0* 
$y = a\sqrt{x}$	*a>0* *a<0* $y^2 = x$ 
$y = a^x$	*a>1(y=e^x)* *0<a<1* 

$y = \log_a x$	*a>1 (y = lnx)*  *0<a<1* 
Тригоно-метричні функції	*y = sinx*  *y = cosx*  *y = tgx*  *графік –синусоїда графік –косинусоїда графік –тангенсоїда*

Література

Методичне забезпечення

1. Інтегральне числення: метод. рек. до проведення практ. занять та сам. роботи студ. інженерно-технологічного фак. / Уманський НУС : [уклад. В. Є. Березовський, С. А.Закорчевна, С.В.Лещенко, Р.В.Ненька, Т. І.Труш.] – Умань: Вид-во КопіЦентр, 2015. – 89 с.

2. Методичні рекомендації для проведення практичних занять з вищої математики по модулю ” Інтегральне числення функції декількох змінних ” для студентів за напрямом підготовки 6.100102 – Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва / В.Є. Березовський, С.А. Закорчевна, Р.В. Ненька. – Умань: Видавничо-поліграфічний центр"Візаві", 2014. – с.82.

3. Диференціальні рівняння. Числові та степеневі ряди.: метод. рек. до проведення практ. занять та сам. роботи студ. інженерно-технологічного фак. / Уманський НУС : [уклад. В. Є. Березовський, С. А.Закорчевна, С.В.Лещенко, Р.В.Ненька, Т. І.Труш.] – Умань: Вид-во КопіЦентр, 2014. – 61 с.

Базова література

4. Вища математика: підруч. для студ. вищ. навч. закл. / Призва Г.Й., Плахотник В.В., Гординський Л.Д. та ін.: за ред.. Г.Л.Куленіча. – Вид. 2-ге (відредаг. і доповн.). – К.: Либідь, 2003.– – 400с.

5. Дубовик В.П. Вища математика: Навч. посібник. / Дубовик В.П., Юрик І.І., - К.: А.С.К., 2005.– 648 с.

6. Вища математика: приклади і задачі. / Дюженкова Л.І. Дюженкова О.Ю. Михалін Г.О.. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002.– 624с.

7. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, Математичний аналіз: навчальний посібник. / Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С. – Чернівці: Рута, 2007.– 440с.

8. Шкіль М.І., Вища математика: підручник: У 3 кн.: кн. 2. Диференційне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. / Шкіль М.І., Колесник Т.В. - К.: Либідь 1994- 352 с.

9. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике./ Каплан И.А. – Х.: Издательство государственного университета им. А.М. Горького, - 1967. – С. 945.

Інформаційні ресурси

10. http://www.allmath.ru/ - Електронні матеріали з математики.

11. http://www.mathelp.spb.ru/ - Матеріали з вищої математики на допомогу студентам.

12. http://mathem.h1.ru/ - Математика On- Line: довідкова інформація з математичних дисциплін.