

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УМАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет лісового і садово-паркового господарства
Кафедра геодезії, картографії і кадастру

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ
ІЗ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
«СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ В ГЕОДЕЗІЇ»

для студентів спеціальності G18

«Геодезія та землеустрій»

Освітній рівень «бакалавр»

Умань – 2025

Укладачі: д. геогр. н., проф. Кисельов Ю.О.; д. техн. н., проф. Рудий Р.М.; д. техн. н. Іванчук О.М.; к. техн. н., доц. Міхно П.Б.; к. с.-г. н., доц. Шемякін М.В.; к. е. н., доц. Боровик П.М.; к. е. н., доц. Удовенко І.О.; ст. викл. Кононенко С.І.; викл. Прокопенко Н.А.

Рецензенти:

доктор географічних наук, професор, завідувач кафедри екології та безпеки життєдіяльності Уманського національного університету С.П. Сонько;

кандидат географічних наук, магістр геодезії та землеустрою, доцент, доцент кафедри географії, геодезії та землеустрою Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини О.І. Ситник.

Методичні вказівки розглянуті на засіданні кафедри геодезії, картографії і кадастру (3 березня 2025 р., протокол №9)

Рекомендовано до видання науково-методичною комісією факультету лісового і садово-паркового господарства УНУ (20 березня 2025 р., протокол №4)

© Кисельов Ю. О., Рудий Р. М., Іванчук О. М.,
Міхно П. Б., Шемякін М. В., Боровик П. М.,
Удовенко І. О., Кононенко С. І.,
Прокопенко Н. А., 2025

© Уманський національний університет
садівництва, 2025

ЗМІСТ

Передмова.....	4
Практична робота №1. Основи теорії ймовірностей.....	6
Практична робота №2. Математична статистика.....	9
Практична робота №3. Числові характеристики випадкових величин.....	16
Практична робота №4. Кореляційний і регресійний аналіз.....	24

Передмова

Навчальна дисципліна «Статистичні методи в геодезії», яка є обов'язковою дисципліною в системі підготовки бакалаврів геодезії та землеустрою, вивчається студентами спеціальності G18 «Геодезія та землеустрій» на II курсі в 3 семестрі.

Дисципліна «Статистичні методи в геодезії» складається з двох змістових модулів, перший із яких дає знання основ теорії ймовірності, а другий – найважливіші відомості з математичної статистики.

Під час практичних занять студенти оволодівають уміннями й навичками на основі знань, одержаних під час вивчення теоретичного матеріалу, зокрема обчислення за формулами, застосування критеріїв статистичної перевірки гіпотез тощо.

Метою вивчення дисципліни є набуття студентами знань з основ теорії ймовірностей та математичної статистики.

В результаті вивчення дисципліни студенти повинні:

знати:

- методи математичної обробки вимірювань (рівно точних, нерівно точних, подвійних);
- методику оцінки точності функцій виміряних величин;

вміти:

- визначати числові характеристики випадкових величин,
- виконувати статистичну перевірку гіпотез;

володіти:

- основними поняття теорії ймовірностей та математичної статистики;
- математико-статистичними методами, що застосовуються в геодезії (методи статистичної перевірки гіпотез, регресійний, кореляційний аналіз тощо).

Компетентності, якими має оволодіти студент в процесі вивчення дисципліни:

Інтегральна компетентність:

здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі геодезії та землеустрою.

Загальні компетентності:

ЗК 1 Здатність вчитися й оволодівати сучасними знаннями;

ЗК 2 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

Фахові компетентності:

ФК 2 Здатність застосовувати теорії, принципи, методи фізико-математичних, природничих, соціально-економічних, інженерних наук при виконанні завдань геодезії та землеустрою;

ФК 6 Здатність виконувати дистанційні, наземні, польові та камеральні дослідження, інженерні розрахунки з опрацювання результатів досліджень, оформляти результати досліджень, готувати звіти при вирішенні завдань геодезії та землеустрою.

Програмні результати навчання, яких студент має досягти в результаті вивчення дисципліни:

ПРН 5 Застосовувати концептуальні знання природничих і соціально-економічних наук при виконанні завдань геодезії та землеустрою;

ПРН 11 Організовувати та виконувати дистанційні, наземні, польові і камеральні роботи в сфері геодезії та землеустрою, оформляти результати робіт, готувати відповідні звіти.

Практична робота №1 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теоретична частина:

Різні події відрізняються між собою за ступенем можливості їх появи, та за характером взаємозв'язку. Щоб правильно орієнтуватися в теоремах теорії ймовірностей події класифікують за видами:

1 Вірогідні події - це події, які обов'язково виникнуть при здійсненні обумовленого комплексу умов їх позначають буквою U . Тоді вірогідна подія A буде: $A=U$

2 Неможливі події - це події, які при виконанні випробування (дослідження) не виникають їх позначають буквою V . Отже подія B буде: $B=V$

3 Рівноможливі події - це дві чи декілька випадкових подій, якщо умови їх появи однакові, і нема підстави стверджувати, що будь-яке з них має більше шансів з'явитися частіше від іншого.

4 Сумісні події - це події, які виникають, коли поява однієї із них не суперечить появі іншої. Тобто при випробуванні можуть настати всі події.

5 Несумісні події - це події, сумісна поява яких при випробуванні є неможливою.

6 Єдиноможливі події - це такі події, коли при випробуванні поява однієї, і тільки однієї, із них є вірогідною подією. Ці події попарно несумісні. Система єдиноможливих подій утворює повну групу подій. Отже при випробуванні одна подія із повної групи подій обов'язково з'явиться.

7 Протилежними називають дві єдиноможливі події, які утворюють повну групу подій. Протилежні події позначають такими ж буквами з рискою зверху: $H=\bar{A}$

8. Незалежною подія A по відношенню до події B називається, якщо ймовірність події A не залежить від того, виникла подія B чи ні. В протилежному випадку подію A називають **залежною** від події B .

Умова залежності: $P(A/B) \neq P(A)$

Умова незалежності: $P(A/B) = P(A)$

9. Декілька подій називають **незалежними в сукупності**, якщо кожна з них та будь-яка складна подія (складена із решти комбінацій всіх чи частки подій) — події незалежні. На відміну від умовної ймовірності, ймовірність незалежних подій інколи називають **безумовною ймовірністю**.

Припустимо, що проведено n дослідів. В кожному з них з'явилася, чи ні, деяка подія A . **Частотою події A** називають відношення числа появи події A до числа всіх дослідів (подій). Позначимо частоту події A через Q ,

$$Q = \frac{k}{n}$$

де k - число сприятливих подій A ,

n - число всіх подій.

Частота вірогідної події буде дорівнювати одиниці. Це виникає з того, що вірогідна подія A виникає при кожному випробуванні, тоді $k=n$, $Q=1$.

Частота неможливої події дорівнює нулю, оскільки при повторенні дослідів неможлива подія не виникає, тобто $k=0$, $Q=0$. Зрозуміло, що випадкова подія A в серії із n подій може з'явитися від 0 до n разів, тобто: $0 < k < n$

Це говорить про те, що частота випадкової події A буде додатна між нулем і одиницею, тобто: $0 < Q < 1$

Ймовірність випадкової події - постійне число, біля якого групуються частоти події при збільшенні числа досліджень (**статистичне визначення**).

Відношення числа сприятливих випадків даної події до загального числа рівнозначних випадків називають **класичним визначенням ймовірності**. Вона виражає числову характеристику об'єктивної можливості появи події. Якщо дослід зведений до схеми випадків (шансів), то ймовірність події A обчислюють за формулою:

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

де M - число сприятливих випадків,

N - число всіх випадків.

Аксіоми теорії ймовірностей:

- ймовірність достовірної події U дорівнює одиниці $P(U)=1$;
- ймовірність неможливої події V дорівнює нулю $P(V)=0$;
- ймовірність випадкової події A є додатне число, що міститься між нулем і одиницею тобто: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Сумою декількох подій називають подію, коли при випробуваннях виникає хоча б одна з цих подій. Суму подій $A, B, C, \dots, N$ позначають S .

$$S = A + B + C + \dots + N$$

Ймовірність появи однієї із декількох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій. Якщо подія B складається із подій $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, тобто:

$$P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Ймовірність множення двох чи декількох подій дорівнює множенню ймовірності однієї з них на умовні ймовірності решти подій, розрахованих у передбаченні, що всі попередні події мали місце:

$$P(AB) = P(A) * P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B) * P\left(\frac{A}{B}\right)$$

Ймовірність події A , що може виникнути разом з однією із гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ дорівнює сумі парних добутоків ймовірностей кожної із цих гіпотез на відповідні їм умовні ймовірності появи події A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) * P\left(\frac{A}{H_i}\right)$$

Хід роботи:

1. Визначення частоти події.

В ряду $n=10$ рівноточних вимірювань лінії x_i встановити частоту Q отримання результату x_k відповідно номеру варіанту:

Значення, м	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	119,999	120,005	120,001	120,016	120,002	120,003	120,006	120,013	120,006	120,009
x_2	120,003	120,011	120,000	120,013	120,004	120,002	120,001	120,008	120,007	120,007
x_3	120,001	120,006	119,999	120,011	120,004	120,002	120,002	120,009	120,005	120,008
x_4	120,002	120,005	120,000	120,014	120,004	119,998	120,005	120,012	120,008	120,007
x_5	120,001	120,004	120,003	120,015	119,999	120,003	120,003	120,017	120,005	120,005
x_6	119,998	120,004	120,001	120,012	120,003	120,004	120,004	120,006	120,006	120,007
x_7	120,002	120,005	120,002	120,011	120,003	120,002	120,004	120,007	120,008	120,009
x_8	120,001	120,009	120,003	120,011	120,005	120,003	120,001	120,014	120,008	120,008
x_9	120,002	120,007	120,001	120,012	119,995	120,000	120,004	120,007	120,007	120,008
x_{10}	120,001	120,008	120,002	120,013	120,004	120,004	120,003	120,015	120,007	120,006
x_k	120,001	120,004	120,001	120,011	120,004	120,002	120,004	120,007	120,007	120,008

Кількість вимірювань з результатом x_k складає $k = \underline{\hspace{2cm}}$

$$Q = \frac{k}{n} \quad Q = \frac{\hspace{1cm}}{\hspace{1cm}} = \frac{\hspace{1cm}}{\hspace{1cm}} \quad \text{або} \quad \frac{\hspace{1cm}}{\hspace{1cm}} \%$$

2. Визначення ймовірності події.

В ряду $N=20$ рівноточних вимірювань лінії x_i визначити ймовірність $P(K)$ отримання грубих помилок x_k . Грубими помилками (промахами) вважати результат, що відрізняється від середнього арифметичного більше, ніж на 2 мм:

Значення	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	68,570	77,651	57,292	107,513	111,102	119,524	81,931	120,013	91,340	123,765
	68,575	77,659	57,293	107,516	111,103	119,523	81,939	120,016	91,345	123,763
	68,573	77,657	57,294	107,508	111,104	119,524	81,937	120,008	91,343	123,764
	68,569	77,657	57,295	107,513	111,105	119,525	81,937	120,013	91,346	123,765
	68,571	77,655	57,294	107,507	111,104	119,524	81,935	120,009	91,341	123,764
	68,576	77,658	57,292	107,511	111,102	119,522	81,938	120,011	91,346	123,762
	68,572	77,658	57,294	107,512	111,104	119,524	81,938	120,012	91,342	123,764
	68,575	77,657	57,298	107,514	111,108	119,528	81,937	120,014	91,345	123,768
	68,571	77,655	57,290	107,517	111,100	119,520	81,935	120,017	91,341	123,760
	68,574	77,655	57,293	107,515	111,103	119,523	81,935	120,015	91,344	123,763
	68,580	77,656	57,293	107,505	111,103	119,523	81,936	120,006	91,340	123,763
	68,574	77,657	57,294	107,512	111,104	119,524	81,937	120,012	91,344	123,764
	68,572	77,658	57,293	107,506	111,103	119,523	81,938	120,007	91,342	123,763
	68,575	77,659	57,292	107,511	111,102	119,522	81,939	120,011	91,345	123,762
	68,571	77,658	57,295	107,514	111,105	119,525	81,938	120,014	91,341	123,765
	68,579	77,658	57,293	107,511	111,103	119,523	81,938	120,011	91,349	123,763
	68,572	77,657	57,295	107,507	111,105	119,525	81,937	120,007	91,342	123,765
	68,577	77,658	57,290	107,512	111,106	119,520	81,938	120,012	91,347	123,760
	68,571	77,657	57,294	107,515	111,104	119,524	81,937	120,015	91,341	123,764
	68,578	77,656	57,294	107,513	111,104	119,524	81,936	120,013	91,348	123,764

Середнє арифметичне із результатів вимірювань складає: $x_0 = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{\quad}{\quad} = \quad$ мм

Кількість вимірювань з результатом x_k (грубі помилки) $|x_i - x_k| > 2$ мм складає $M = \quad$

Ймовірність отримання промахів складає $P(K) = \frac{M}{N} = \frac{\quad}{\quad} = \quad$

3. Ймовірність незалежних подій як множення ймовірностей цих подій.

Вимірювання кута складається із ряду елементарних подій:

A – встановлення теодоліта у робоче положення;

B – встановлення візирних цілей;

C – візування зоровою трубою на візирні цілі;

D – взяття відліку по лімбу горизонтального круга.

Встановити ймовірність правильного вимірювання кута одним прийомом, якщо ймовірності окремих подій дорівнюють:

Значення	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(A)$	0,89	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91
$P(B)$	0,95	0,94	0,93	0,92	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95
$P(C)$	0,92	0,93	0,94	0,95	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,91
$P(D)$	0,98	0,99	0,98	0,99	0,98	0,99	0,98	0,99	0,98	0,99

Так як ймовірності подій A, B, C і D незалежні, і всі вони повинні з'явитися сумісно, то

$P = P(A) * P(B) * P(C) * P(D)$ $P = \quad * \quad * \quad * \quad = \quad$

4. Зробити висновки _____

Практична робота № 2 МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Хід роботи:

1.1. Встановлення наявності впливу систематичних похибок при вимірювання відомої величини.

Визначити наявність систематичної похибки з ймовірністю p при компаруванні рулетки на польовому компараторі довжиною $L = 120,000$ м, якщо отримані наступні значення вимірюваних довжини l_i :

Значення	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0,99	0,98	0,99	0,9	0,98	0,95	0,90	0,95	0,98	0,95
$l_i, \text{м}$	119,999	120,005	120,001	120,016	120,002	120,003	120,006	120,013	120,006	120,009
	120,003	120,011	120,000	120,013	120,004	120,005	120,001	120,008	120,007	120,007
	120,001	120,006	119,999	120,011	120,004	120,002	120,002	120,009	120,005	120,008
	120,002	120,005	120,000	120,014	120,004	119,998	120,005	120,012	120,008	120,007
	120,001	120,004	120,003	120,015	119,999	120,003	120,003	120,017	120,005	120,005
	119,998	120,004	120,001	120,012	120,003	120,004	120,004	120,006	120,006	120,007
	120,002	120,005	120,002	120,011	120,003	120,002	120,004	120,007	120,008	120,009
	120,001	120,009	120,003	120,011	120,005	120,003	120,001	120,014	120,008	120,008
	120,002	120,007	120,001	120,012	119,995	120,000	120,004	120,007	120,007	120,008
	120,001	120,008	120,002	120,013	120,004	120,004	120,003	120,015	120,007	120,006

Визначити середнє значення величини $\bar{L} = \underline{\hspace{2cm}}$.

Визначити відхилення результатів від ймовірнішого (середнього) $\delta_i = l_i - \bar{L}$

	Значення, мм										Суми
δ_i											
δ_i^2											

Визначити середню квадратичну похибку вимірювання $m = \sqrt{\frac{[\delta_i^2]}{n}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ мм}$

Визначити середню квадратичну похибку ймовірнішого $M = m_{\bar{L}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ мм}$

Визначити відхилення ймовірнішого від дійсного в мм $\Delta = (\bar{L} - L) * 1000 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ мм}$

Визначити статистику $Z = \frac{|\Delta|}{M} = \underline{\hspace{2cm}}$

Визначити рівень значимості $q = 1 - p = \underline{\hspace{2cm}}$

Визначити кількість ступенів вільності $k = n - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$

За таблицею розподілу Стюдента (додаток 1) користуючись параметрами q та k визначити коефіцієнт t_{β} – значення статистики Zq $Zq = \underline{\hspace{2cm}}$

Враховуючи, що при незначному впливі систематичних похибок $Z < Zq$, зробити висновки про наявність/відсутність систематичних похибок у ряді вимірювань.

1.2. Визначення наявності граничних похибок (промахів).

При визначених умовах вимірів завжди існує деяка гранична похибка $|\Delta_{ep}|$, яку не можуть перевищити випадкові похибки. Для виявлення граничних похибок у ряді вимірювань застосувати критерій Греббса:

$$Z = 1000 * \frac{x_{\max} - \bar{X}}{m} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Отримане значення порівняти із табличним (додаток 4), відповідно Вашого рівня значимості q . Враховуючи, що при відсутності грубих помилок $Z < Z_q$, зробити висновки про їх наявність/відсутність у ряді вимірювань.

2.1. Встановлення наявності впливу систематичних похибок при вимірювання невідомої величини.

Для визначення дії систематичних похибок виконано два ряди із $n=10$ незалежних вимірювань базису. В результаті обробки отримані ймовірніші значення $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ величини, та середні квадратичні похибки m_1 , m_2 їх вимірювання. Визначити наявність дії систематичної похибки з ймовірністю $p = 0,99$.

Значення	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{X}_1, \text{М}$	317,222	185,394	264,372	193,567	74,506	417,238	346,614	222,831	91,501	402,267
$\bar{X}_2, \text{М}$	317,215	185,383	264,366	193,547	74,501	417,222	346,608	222,819	91,499	402,249
$m_1, \text{мм}$	11	7	11	9	8	15	9	7	5	14
$m_2, \text{мм}$	14	9	13	10	6	17	12	6	7	15

Визначити відхилення ймовірніших

$$\Delta = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ м}$$

Визначити показники k_1 і k_2

$$k_1 = n_1 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$k_2 = n_2 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Оскільки $n < 30$, обчислюємо статистику

$$Z = \frac{\Delta}{\sqrt{k_1 m_1^2 + k_2 m_2^2}} * \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Визначити рівень значимості

$$q = 1 - p = \underline{\hspace{2cm}}$$

Визначити кількість ступенів вільності

$$k = n_1 + n_2 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Із таблиць Стюдента (додаток 1) за критеріями q і k визначити коефіцієнт t_{β} – значення статистики Z_q

$$Z_q = \underline{\hspace{2cm}}$$

Враховуючи, що незначний вплив систематичних похибки приймається, коли $Z < Z_q$, зробити висновки про наявність/відсутність систематичних похибок у ряді вимірювань.

2.2. Визначення наявності граничних похибок (промахів).

При визначених умовах вимірів завжди існує деяка гранична похибка $|\Delta_{cp}|$, яку не можуть перевищити випадкові похибки. Тоді за функцією Лапласа для нормального закону розподілу (додаток 4) можна визначити інтервал Z_q , і встановити його залежність від рівня значимості q .

Граничне значення похибки вимірювання визначиться за формулою $|\Delta_{cp}| \leq Z_q * m = \underline{\hspace{2cm}} \text{ мм}$

3. Визначення наявності систематичної похибки по послідовних різницях (критерій Аббе).

При спостереженнях за нахилом телевізійної вежі отримані значення крену K_i . Визначити величину крену телевежі при надійній ймовірності $p = 0,99$.

Значення	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K_i, \text{мм}$	49	37	82	63	51	72	111	93	55	68
	50	43	87	69	53	67	109	94	61	67
	52	40	89	60	52	69	108	95	60	68

	50	38	88	61	57	68	109	94	58	67
	53	39	86	65	58	70	110	95	56	63
	54	38	85	64	54	69	107	91	57	62

Визначити середнє значення величини

$$\bar{K} = \frac{[K_i]}{n} = \text{_____ мм}$$

Визначити відхилення результатів від ймовірнішого (середнього)

$$v_i = K_i - \bar{K}$$

Значення	Значення, мм						Суми
v_i							
v_i^2							
$d_i = K_{i+1} - K_i$						xxx	xxx
d_i^2						xxx	

Визначити дисперсію за формулою Бесселя

$$m^2 = \frac{[v^2]}{(n-1)} = \text{_____ мм}^2$$

Визначити середню квадратичну похибку ймовірнішого

$$M = m_{\bar{K}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \text{_____ мм}$$

Визначити послідовні різниці $d_i = K_{i+1} - K_i$. Підвести значення d_i до квадрату. Отримати суму.

Обчислити значення $2(n-1)$

$$2(n-1) = \text{_____}$$

Визначити дисперсію послідовних різниць

$$m_d^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 = \text{_____ мм}^2$$

Наявність систематичної похибки визначається критерієм Аббе $\delta = \frac{m_d^2}{m^2} = \text{_____}$

Визначити рівень значимості

$$q = 1 - p = \text{_____}$$

Визначити δq із таблиць значень Критерію Аббе (додаток 2) за рівнем значимості q та кількістю вимірів n

$$\delta q = \text{_____}$$

Порівняти значення δ та δq та зробити висновок про наявність систематичної похибки при $\delta > \delta q$, або її відсутність при $\delta < \delta q$.

3.2. Визначення наявності граничних похибок (промахів).

При визначених умовах вимірів завжди існує деяка гранична похибка $|\Delta_{cp}|$, яку не можуть перевищити випадкові похибки. Для виявлення граничних похибок у ряді вимірювань застосувати критерій Греббса:

$$Z = \frac{x_{\max} - \bar{X}}{m} = \text{_____}$$

Отримане значення порівняти із табличним (додаток 4), відповідно Вашого рівня значимості q . Враховуючи, що при відсутності грубих помилок $Z < Z_q$, зробити висновки про їх наявність/відсутність у ряді вимірювань.

4. Встановлення рівноточності рядів вимірювання за F-критерієм.

При дослідженнях нахилу фундаментної плити за двома реперами виконано відповідно $n_1 = 6$ та $n_2 = 5$ циклів спостережень. Визначити рівноточність рядів вимірів при заданому p .

Значення	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

р	0,99	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,90	0,95	0,99	0,90
І цикл спостере- жень, Σh , м	0,031	0,475	0,002	0,123	0,951	0,568	0,208	0,811	0,682	0,032
	0,032	0,476	0,005	0,127	0,954	0,566	0,210	0,813	0,683	0,035
	0,027	0,475	0,007	0,124	0,952	0,562	0,209	0,812	0,682	0,038
	0,029	0,476	0,008	0,125	0,953	0,564	0,206	0,812	0,681	0,039
	0,030	0,474	0,005	0,123	0,948	0,563	0,211	0,816	0,684	0,037
	0,026	0,477	0,006	0,124	0,949	0,565	0,213	0,813	0,683	0,039
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ІІ цикл спостере- жень, Σh , м	0,031	0,473	0,008	0,124	0,950	0,561	0,211	0,810	0,685	0,035
	0,033	0,472	0,007	0,121	0,949	0,567	0,212	0,815	0,684	0,034
	0,029	0,478	0,004	0,126	0,949	0,566	0,210	0,811	0,681	0,035
	0,028	0,475	0,006	0,125	0,948	0,564	0,209	0,813	0,682	0,033
	0,030	0,472	0,005	0,127	0,950	0,565	0,211	0,812	0,683	0,034

Визначити середнє арифметичне значення величини $\bar{H}_1 = \frac{[H_i]}{n_1} = \text{_____ м}$

Визначити відхилення результатів від ймовірнішого (середнього) $v_i = H_i - \bar{H}$

Значення	Значення для І циклу, мм						Суми
v_i							
v_i^2							

Визначити дисперсію за формулою Бесселя $m_1^2 = \frac{[v^2]}{(n_1 - 1)} = \text{_____ мм}^2$

Визначити середню квадратичну похибку ймовірнішого $M_1 = m_{\bar{H}_1} = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} = \text{_____ мм}$

Значення	Значення для ІІ циклу, мм						Суми
v_i							
v_i^2							

Визначити середнє арифметичне значення величини $\bar{H}_2 = \frac{[H_i]}{n_2} = \text{_____ м}$

Визначити дисперсію за формулою Бесселя $m_2^2 = \frac{[v^2]}{(n_2 - 1)} = \text{_____ мм}^2$

Визначити середню квадратичну похибку ймовірнішого $M_2 = m_{\bar{H}_2} = \frac{m_2}{\sqrt{n_2}} = \text{_____ мм}$

Визначити статистику $F = \frac{m_1^2}{m_2^2} = \text{_____}$

Визначити рівень значимості $q = 1 - p = \text{_____}$

Визначити кількість ступенів вільності $k_1 = n_1 - 1 = \text{_____}$ $k_2 = n_2 - 1 = \text{_____}$

Із таблиць значень F-критерія (додаток 3) за рівнем значимості q та ступенями вільності k_1, k_2 проінтерполювати значення $Fq = \text{_____}$

Зробити висновок про рівноточність вимірювань, якщо $F < Fq$.

Критерій Стюдента

$n-1 \backslash \begin{matrix} q \\ \beta \end{matrix}$	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,005
	0,90	0,95	0,98	0,99	0,995	0,999
1	6,31	12,71	31,82	63,66	127,3	636,60
2	2,92	4,30	6,96	9,92	14,09	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	8,61
5	2,02	2,57	3,36	4,03	4,77	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
7	1,90	2,36	3,00	3,50	4,03	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,59
12	1,78	2,18	2,68	3,06	3,43	4,32
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	4,14
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	4,02
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,19	3,92
20	1,72	2,09	2,53	2,84	3,15	3,85
25	1,71	2,06	2,48	2,79	3,08	3,72
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,66
∞	1,64	1,46	2,33	2,58	2,81	3,29

Критерій Аббе

$n \backslash q$	0,001	0,01	0,05	$n \backslash q$	0,001	0,01	0,05
4	0,30	0,31	0,39	13	0,30	0,43	0,58
5	0,21	0,27	0,41	14	0,31	0,45	0,59
6	0,18	0,28	0,44	15	0,33	0,46	0,60
7	0,19	0,31	0,47	16	0,34	0,48	0,61
8	0,20	0,33	0,49	17	0,36	0,49	0,62
9	0,22	0,35	0,51	18	0,37	0,50	0,63
10	0,24	0,38	0,53	19	0,38	0,51	0,64
11	0,26	0,40	0,55	20	0,39	0,52	0,65
12	0,28	0,41	0,56				

F-критерій

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	5	7	10	15	20
<i>q = 0,10</i>								
2	8,5	9,0	9,2	9,3	9,3	9,4	9,4	9,4
3	5,5	5,5	5,4	5,3	5,3	5,2	5,2	5,2
5	4,1	3,8	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2
7	3,6	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6
10	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2
15	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9
20	3,0	2,6	2,4	2,2	2,0	1,9	1,8	1,8
<i>q = 0,05</i>								
3	10,1	9,6	9,3	9,0	8,9	8,8	8,7	8,7
5	6,6	5,8	5,4	5,1	4,9	4,7	4,6	4,6
7	5,6	4,7	4,3	4,0	3,8	3,6	3,5	3,4
10	5,0	4,1	3,7	3,3	3,1	3,0	2,8	2,8
15	4,5	3,7	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3
20	4,4	3,5	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	2,1
<i>q=0,01</i>								
5	16,3	13,3	12,1	11,0	10,5	10,1	9,7	9,6
7	12,2	9,5	8,5	7,5	7,0	6,6	6,3	6,2
10	10,0	7,6	6,6	6	5,2	4,8	4,6	4,4
15	8,7	6,4	5,4	4,6	4,3	3,8	3,5	3,4
20	8,1	5,8	4,9	3,7	3,4	3,4	3,1	2,9

Таблиця значень Zq (критерій Греббса)

<i>q</i>	0,10	0,05	0,01	0,0027	0,001	0,0001
<i>Zq</i>	1,64	1,96	2,58	3,00	3,29	3,89

Критерій Бартлета

k=n-1	q				
	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
1	2,7	3,8	6,6	7,9	10,8
2	4,6	6,0	9,2	10,6	13,8
3	6,3	7,8	11,3	12,8	16,3
4	7,8	9,5	13,3	14,9	18,5
5	9,2	11,1	15,1	16,3	20,5
6	10,6	12,6	16,8	18,6	22,5
7	12,0	14,1	18,5	20,3	24,3
8	13,4	15,5	20,1	21,9	26,1
9	14,7	16,9	21,7	23,6	27,9
10	16,0	18,3	23,2	25,2	29,6
11	17,3	19,7	24,7	26,8	31,3
12	18,5	24,1	28,3	28,3	32,9
13	19,8	22,4	27,7	29,8	34,5
14	21,1	23,7	29,1	31,3	36,1
15	22,3	25,0	30,6	32,8	37,7
16	23,5	26,3	32,0	34,3	39,2
17	24,8	27,6	33,4	35,7	40,8
18	26,0	28,9	34,8	37,2	42,3
19	27,2	30,1	36,2	38,6	43,8
20	28,4	31,4	37,6	40,0	45,3
21	29,6	32,7	38,9	41,4	46,8
22	30,8	33,9	40,3	42,8	48,3
23	32,0	35,3	41,6	44,2	49,7
24	33,2	36,4	43,9	45,6	51,3
25	34,4	37,7	44,3	46,9	52,6
26	35,6	38,9	45,6	48,3	54,1
27	36,7	40,1	47,0	49,6	55,5
28	37,9	41,3	48,3	51,0	56,9
29	39,1	42,6	49,6	52,3	58,3
30	40,3	43,8	50,9	53,7	59,7

Практична робота № 3

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Теоретична частина:

При вирішенні практичних задач в геодезії бажано знати характерні риси закону розподілу. В теорії ймовірностей їх називають **числовими характеристиками випадкової величини X** . Вони в досить стислому вигляді характеризують той чи інший закон розподілу. Властивості випадкової величини X характеризують параметри:

- математичне сподівання,
- мода,
- медіана,
- дисперсія,
- стандарт (середнє квадратичне відхилення),
- початковий момент,
- центральний момент,
- асиметрія,
- ексцес.

Більш узагальненими основними характеристиками випадкових величин є моменти випадкової величини.

Математичним сподіванням випадкової величини X називається сума добутку всіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень.

$$M_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Мода M_o дискретної випадкової величини – це таке її значення, що має найбільшу ймовірність. Практично, якщо маємо дискретний ряд розподілу, то знаходимо таке k -те значення випадкової величини x , що має найбільшу величину ймовірності

$$P_n(k) \rightarrow \max$$

Медіаною Me випадкової величини X називають таке її значення, відносно якого ймовірність появи як більшого, так і меншого значення випадкової величини X має приблизно однакову ймовірність, тобто:

$$P(X < Me) = P(X > Me)$$

Геометрична медіана - це абсциса точки, де площа кривої розподілу розділяється наполовину. Тоді функція розподілу в точці Me дорівнює:

$$F(Me) = P(X < Me) = 0,5$$

Якщо розподіл випадкової величини симетричний і одномодальний то математичне сподівання, мода і медіана збігаються, тобто:

$$M_x = M_o = Me$$

Дисперсією випадкової величини є математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання, тобто:

$$D_x = M[(X - M_x)^2]$$

Для дискретної випадкової величини дисперсія матиме вигляд суми:

$$D_x = \sum_{i=1}^n (x_i - M_x)^2 p_i$$

Для характеристики міри розсіювання випадкової величини приймають додатковий квадратичний корінь із дисперсії. Цю характеристику називають **середнім квадратичним відхиленням** або **стандартом** і позначають символом σ_x

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}$$

Стандарт має таку саму розмірність, як і випадкова величина X .

Початковим моментом k -го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання від величини X^k , тобто:

$$\alpha_k = M[X^k]$$

Для дискретної випадкової величини початковий момент буде:

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i$$

При порівнянні формул видно, що початковий момент першого порядку є математичне сподівання випадкової величини, тобто $\alpha_1 = Mx$.

Центральним моментом k -го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання від величини $(X - Mx)^k$. Тоді:

$$\mu_k = M[(X - Mx)^k]$$

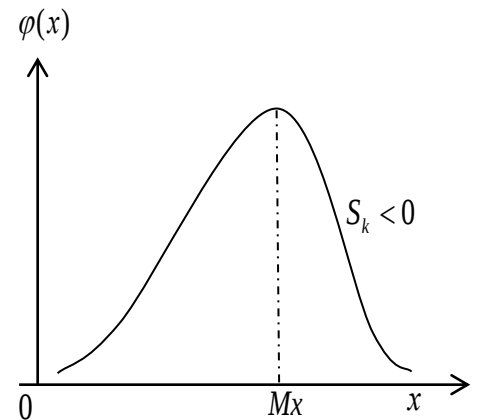
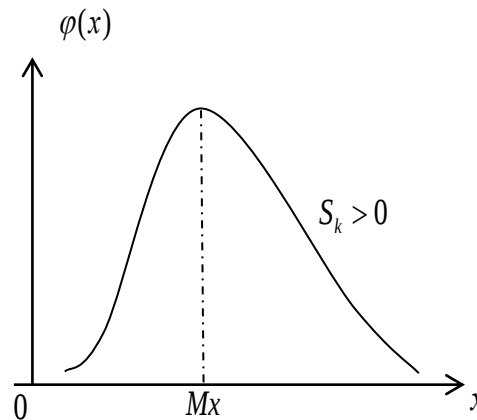
Для дискретної випадкової величини початковий момент буде:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - Mx)^k p_i$$

Центральний момент першого порядку завжди буде дорівнювати нулю. При порівнюванні формул видно, що центральним моментом другого порядку є дисперсія випадкової величини X .

Третій центральний момент μ_3 служить характеристикою асиметрії (скошеності графіку) розподілу. Якщо $\mu_3 = 0$, то ми маємо симетричний розподіл випадкової величини відносно математичного сподівання Mx .

Асиметрія — це відношення третього центрального моменту до середнього квадратичного відхилення в третьому степені



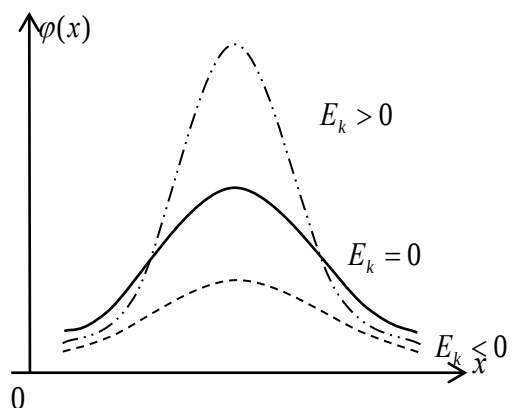
$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Величина S_k визначає коефіцієнт асиметрії і може бути як з плюсом так і з мінусом.

Четвертий центральний момент μ_4 служить для обчислення ексцесу (характеристики островерхості або плосковерхості) графіку розподілу. **Ексцесом** випадкової величини X називають величину, що описується залежністю:

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Якщо $E_k = 0$, то крива розподілу буде еталоном, з яким зрівнюють інші закони розподілу. Так при $E_k > 0$ крива буде більш гостроверхою, при $E_k < 0$ — плосковерхою.



Хід роботи:

Аналіз розподілу результатів багаторазових вимірювань горизонтального кута

Постановка задачі і вихідні дані:

При проведенні експериментальних досліджень горизонтальний кут β вимірюють $n = 60$ прийомами. Виконати аналіз результатів вимірювань та оцінити параметри закону розподілу:

1) побудувати ступінчатий графік, гістограму і полігон частот;

- 2) обчислити асиметрію та ексцес помилок вимірювань;
- 3) виконати точкову та інтервальну оцінку параметрів розподілу результатів вимірювань при довірчій ймовірності $P=0,99$.
- 4) Обчислення проводити із точністю до $0,01''$.

Польовий журнал багаторазових вимірювань кута β

<i>№</i>	<i>Значення β</i>	<i>№</i>	<i>Значення β</i>	<i>№</i>	<i>Значення β</i>
1	72°11'01,1"	21	72°11'03,7"	41	72°11'04,8"
2		22	72°11'03,7"	42	72°11'04,8"
3		23	72°11'03,8"	43	72°11'04,9"
4	72°11'01,8"	24	72°11'03,8"	44	72°11'05,0"
5		25	72°11'03,9"	45	72°11'05,0"
6		26	72°11'03,9"	46	72°11'05,0"
7	72°11'02,5"	27	72°11'04,0"	47	72°11'05,1"
8	72°11'02,5"	28	72°11'04,0"	48	72°11'05,4"
9	72°11'02,8"	29	72°11'04,1"	49	72°11'05,5"
10	72°11'02,9"	30	72°11'04,1"	50	72°11'05,6"
11	72°11'03,0"	31	72°11'04,2"	51	72°11'05,6"
12	72°11'03,0"	32	72°11'04,2"	52	72°11'05,8"
13	72°11'03,1"	33	72°11'04,3"	53	
14	72°11'03,2"	34	72°11'04,3"	54	72°11'06,0"
15	72°11'03,3"	35	72°11'04,4"	55	72°11'06,1"
16	72°11'03,3"	36	72°11'04,5"	56	72°11'06,2"
17	72°11'03,3"	37	72°11'04,6"	57	72°11'06,4"
18	72°11'03,4"	38	72°11'04,7"	58	72°11'06,4"
19	72°11'03,4"	39	72°11'04,7"	59	
20	72°11'03,6"	40	72°11'04,7"	60	

Для індивідуалізації роботи внесіть у таблицю наступні значення кутів:

$$\begin{aligned}
 \beta_2 &= 72^\circ 11' 01,3'' + 0,1'' \cdot (\text{№ варіанта}); & \beta_3 &= 72^\circ 11' 01,4'' + 0,1'' \cdot (\text{№ варіанта}); \\
 \beta_5 &= 72^\circ 11' 02,2'' + 0,1'' \cdot (\text{№ варіанта}); & \beta_6 &= 72^\circ 11' 02,3'' + 0,1'' \cdot (\text{№ варіанта}); \\
 \beta_{53} &= 72^\circ 11' 06,0'' - 0,1'' \cdot (\text{№ варіанта}); & \beta_{59} &= 72^\circ 11' 07,3'' - 0,1'' \cdot (\text{№ варіанта}); \\
 \beta_{60} &= 72^\circ 11' 07,5'' - 0,1'' \cdot (\text{№ варіанта}).
 \end{aligned}$$

1. В таблиці «Результати вимірювань горизонтального кута β_i » у колонці 2 розташувати результати вимірювань β_i у порядку їх зростання.

2. Прийняти, що $X_0 = 72^\circ 11' 00,0''$ – умовне приблизне значення шуканого кута.

3. Визначити й записати у колонку 3 відхилення від умовного приблизного значення шуканого кута $X_i = \beta_i - X_0$

4. Визначити ймовірне значення виміряного кута (центр групування для $n=60$ результатів вимірів):

$$X_{\text{сер}} = \sum X_i / n$$

$$X_{\text{сер}} = \underline{\hspace{2cm}}''$$

$$\beta_{\text{сер}} = X_0 + X_{\text{сер}}$$

$$\beta_{\text{сер}} = 72^\circ 11' \underline{\hspace{1cm}}''.$$

5. В колонку 4 записати ймовірні похибки вимірювань $V_i = X_i - X_{\text{сер}}$

Результати вимірювань горизонтального кута β_i

i	β_i (° ' ")	$X_i = \beta_i - X_0$ (")	$V_i = X_i - X_{сер}$ (")	V_i^2	V_i^3	V_i^4	інтервали	Частоти g_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.								
2.								
3.								
4.								
5.								
6.								
7.								
8.								
9.								
10.								
11.								
12.								
13.								
14.								
15.								
16.								
17.								
18.								
19.								
20.								
21.								
22.								
23.								
24.								
25.								
26.								
27.								
28.								
29.								
30.								
31.								
32.								
33.								
34.								
35.								
36.								
37.								
38.								
39.								
40.								
41.								
42.								
43.								
44.								
45.								
46.								
47.								
48.								
49.								
50.								

51.								
52.								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
53.								
54.								
55.								
56.								
57.								
58.								
59.								
60.								
61.								
Σ	---							
Σ/n	---							

Контроль: $\Sigma V_i = 0,00''$. У разі заокруглення величини $X_{сер.}$ відхилення ΣV_i від $0,00''$ може бути на величину $\Delta=0,01''$.

6. В колонках 5, 6 та 7 обчислити значення V_i^2 , V_i^3 та V_i^4 , а в кінці таблиці суми ΣV_i^2 , ΣV_i^3 та ΣV_i^4 .

7. Обчислити довжину інтервалу за формулою:

$$l = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{1 + 3,2 * \log n} \quad l = \text{---} = \text{---}''$$

Отриману величину l заокруглити до $0,1''$

8. Обчислити кількість інтервалів за формулою:

$$k = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{l} \quad k = \text{---} = \text{---}$$

Отриману величину k заокруглюємо до цілого числа, тобто $k = \text{---}$.

9. У колонці 8 визначити межі інтервалів. При цьому допускається початкове значення першого інтервалу та кінцеве значення останнього інтервалу прийняти зручним для визначення меж внутрішніх інтервалів і заокруглити їх до $0,5''$ або до $0,1''$.

10. У графі 9 визначити частоти ϑ_i , тобто кількість похибок V_i , що знаходяться в кожному інтервалі.

11. Створити таблицю інтервалів похибок результатів вимірів та розташувати інтервали згідно похибок V_i від від'ємних до додатних .

Інтервали похибок результатів вимірювань та емпіричні параметри розподілу

k	Інтервали		Частоти ϑ_i	Накопичені частоти $\Sigma \vartheta_i$	Середні відхилення V_i	Відносні частоти θ_i	Емпіричні значення функцій	
	від	до					розподілу	щільності
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
Σ								

12. У колонки 2 і 3 таблиці внести мінімальні (від) і максимальні (до) ймовірні похибки вимірювань V_i для кожного інтервалу.

13. У графі 5 таблиці визначити накопичені частоти Σg_i , де $\Sigma g_1 = \Sigma g_1$; $\Sigma g_2 = \Sigma g_1 + \Sigma g_2$; $\Sigma g_3 = \Sigma g_1 + \Sigma g_2 + \Sigma g_3$; $\Sigma g_k = \Sigma g_i + \Sigma g_i + \dots + \Sigma g_k$.

14. У графі 6 для кожного інтервалу визначити середнє значення похибок вимірювань, що знаходяться в зазначеному інтервалі, за формулою:

$$V_i^{сep} = \frac{V_i^{max} + V_i^{min}}{2}$$

де i – номер інтервалу.

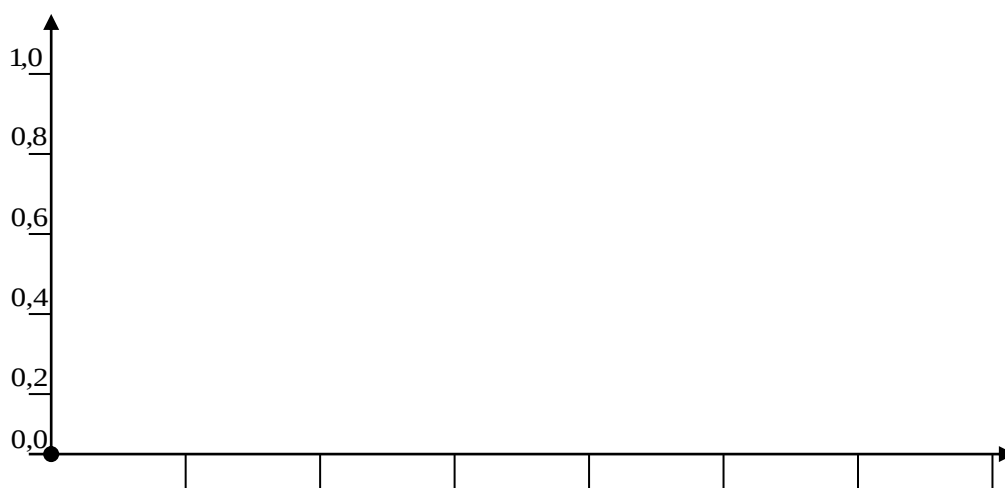
15. До графі 7 для кожного інтервалу обчислити відносні частоти за формулою $\theta_i = g_i / n = g_i / 60$. **Контроль:** $\Sigma \theta_i = 1$.

16. У графі 8 для кожного інтервалу обчислити емпіричні значення інтегральної функції розподілу $F_i(V_{сep.})$ ($F_1(V_{сep.}) = \theta_1$; $F_2(V_{сep.}) = \theta_1 + \theta_2$; $F_3(V_{сep.}) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$, ..., $F_k(V_{сep.}) = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_k$). **Контроль:** $F_k(V_{сep.}) = 1$.

17. У графі 9 кожного інтервалу обчислити емпіричні значення функції щільності $\phi_i = \theta_i / l$, де $i = 1, 2, 3, \dots, k$; l – довжина інтервалу (дивись пункт 7).

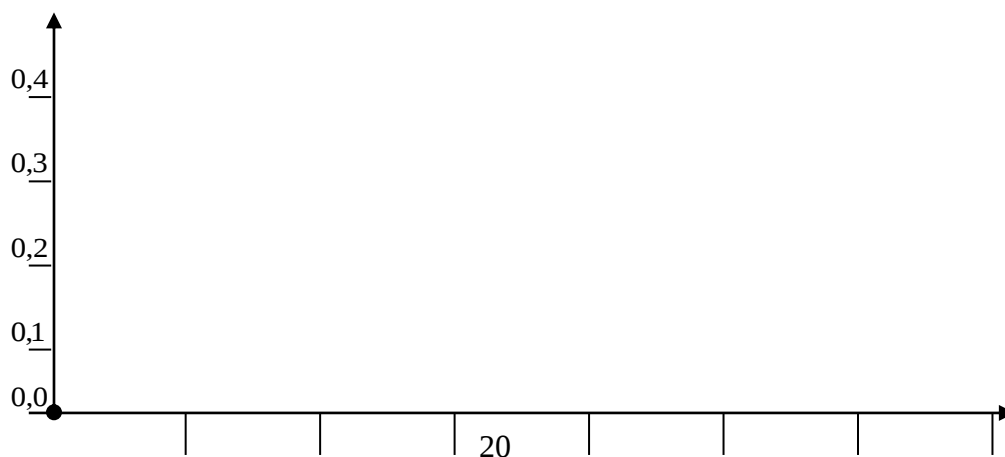
18. Згідно графі 3 таблиці **Результати вимірювань горизонтального кута β_i** та графі 8 таблиці **Інтервали похибок результатів вимірювань та емпіричні параметри розподілу** збудувати ступінчатий графік емпіричної інтегральної функції розподілу $F_i(V_{сep.})$, де $i = 1, 2, 3, \dots, k$. По осі абсцис відкласти похибки V_i , а по осі ординат - функції розподілу $F_i(V_{сep.})$.

Ступінчатий графік емпіричної інтегральної функції розподілу $F_i(V_{сep.})$



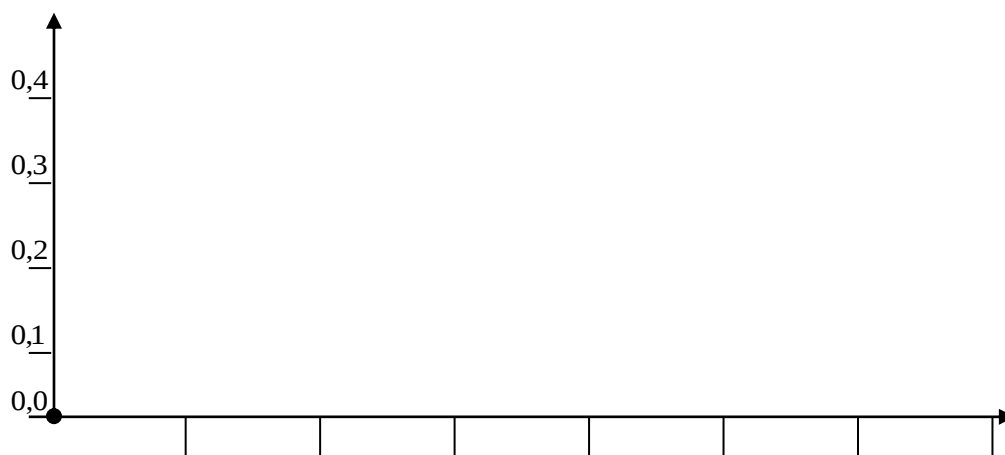
19. Згідно графі 7 збудувати полігон (ламану лінію) емпіричних частот розподілу θ_i , де $i = 1, 2, 3, \dots, k$

Полігон емпіричних частот розподілу θ_i



20. Згідно даних графі 9 збудувати гістограму (плавну криву) емпіричної щільності розподілу φ_i , де $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

Гістограма емпіричної щільності розподілу φ_i



21. Використовуючи дані з таблиці **Результати вимірювань горизонтального кута β_i** , обчислити середню квадратичну похибку вимірювання кутів за формулою Бесселя:

$$m = \sqrt{\frac{[V_i^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{\quad}{\quad}} = \frac{\quad}{\quad} "$$

22. Обчислити центральні моменти третього та четвертого порядків:

$$\mu_3 = \frac{\sum V_i^3}{n-1} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\mu_4 = \frac{\sum V_i^4}{n-1} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

22. Обчислити асиметрію S_k , ексцес E_k та їх середні квадратичні похибки m_S і m_E за формулами:

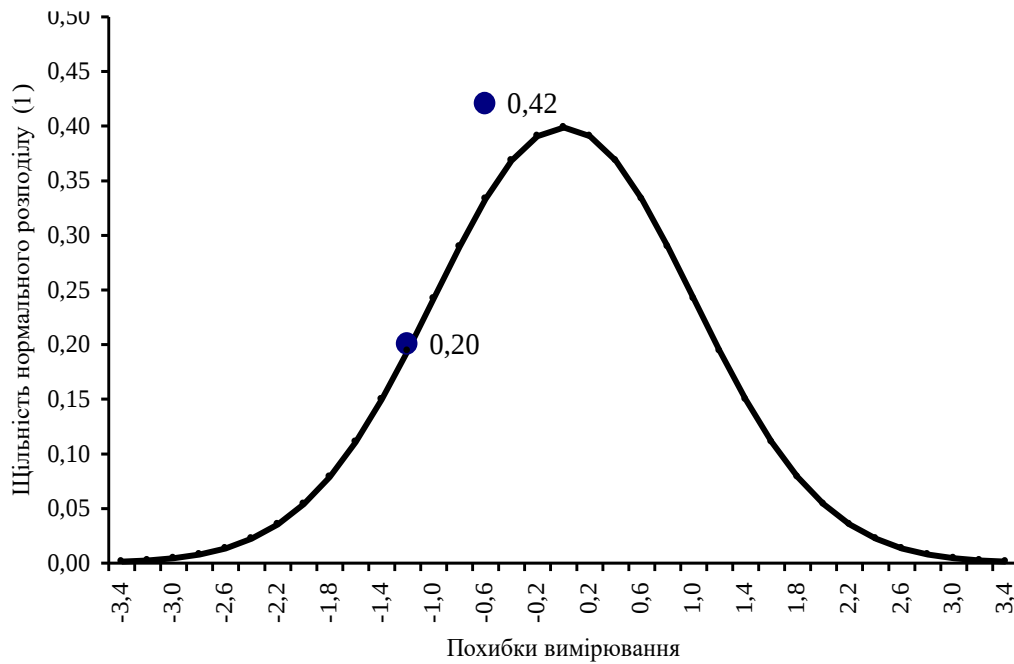
$$S_k = \frac{\mu_3}{m^3} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$m_S = \sqrt{\frac{6}{n}} = \sqrt{\frac{\quad}{\quad}} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$E_k = \frac{\mu_4}{m^4} - 3 = \frac{\quad}{\quad} - 3 = \frac{\quad}{\quad}$$

$$m_E = \sqrt{\frac{24}{n}} = \sqrt{\frac{\quad}{\quad}} = \frac{\quad}{\quad}$$

23. Збудувати криву емпіричного розподілу на наданому графіку закону нормального розподілу по величинам похибок і щільності розподілу. Показати відхилення емпіричного розподілу згідно із асиметрією S_k та ексцесом E_k .



Примітки:

а) якщо значення асиметрії додатне ($S_k > 0$), то права гілка лінії емпіричного розподілу зміститься праворуч від лінії нормального розподілу, а ліва – ліворуч;

б) якщо значення ексцесу додатне ($E_k > 0$), то лінія емпіричного розподілу піднімається вище лінії нормального розподілу і навпаки.

24. Обчислити середню квадратичну похибку ймовірного значення горизонтального кута $\beta_{сер}$ за

формулою: $M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{m}{\sqrt{60}} = \text{_____}''$

25. Із таблиць розподілу Стюдента вибрати значення t_β для ймовірності $p=0,99$ при $q= n - 1$. В нашому випадку $t_\beta = \text{_____}$.

26. Визначити довірчий інтервал для істинного значення виміряного горизонтального кута за формулою:

$$\beta_{сер} - t_\beta * M \leq \beta \leq \beta_{сер} + t_\beta * M$$

де $t_\beta * M = \text{_____}''$

$$\text{_____}^\circ \text{_____}' \text{_____}'' \leq \beta \leq \text{_____}^\circ \text{_____}' \text{_____}''$$

27. Визначити довірчий інтервал для окремого значення виміряного горизонтального кута за формулою:

$$\beta_{сер} - t_\beta * m \leq \beta \leq \beta_{сер} + t_\beta * m$$

де $t_\beta * m = \text{_____}''$

$$\text{_____}^\circ \text{_____}' \text{_____}'' \leq \beta \leq \text{_____}^\circ \text{_____}' \text{_____}''$$

Висновки

Обробка результатів вимірювання горизонтального кута та їх аналіз показала, що розподіл похибок вимірювання близький до нормального розподілу:

Асиметрія $S_k = \text{_____}$ при $m_s = \text{_____}$.

Ексцес $E_k = \text{_____}$ при $m_E = \text{_____}$.

Ймовірне значення горизонтального кута $\beta_{сер} = \text{_____}^\circ \text{_____}' \text{_____}''$.

Середня квадратична похибка вимірювання $m = \text{_____}''$.

Середня квадратична похибка ймовірного значення горизонтального кута складає $M = \text{_____}''$.

Довірчий інтервал, в якому знаходиться істинне значення виміряного горизонтального кута, складає _____ з ймовірністю $p=0,99$.

Практична робота № 4

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ І РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

Теоретична частина:

Співвідношення ознак, виявлених в результаті статистичних групувань, відрізняються від співвідношень, які мають місце при функціональних зв'язках, коли кожному значенню аргументу відповідає визначене значення функції. Термін "кореляція" вперше застосував Ж. Кюв'є у праці "Лекції із порівняльної анатомії" (1800-1805 pp.). Початкові математичні побудови методу кореляції були дані О. Браве у 1846 р. ("кореляція" - від латинського "correlation" відношення, що означає співвідношення, відповідність предметів або понять).

Кореляцією називається неповний зв'язок між досліджуваними явищами. Це така залежність, коли будь-якому значенню однієї змінної величини може відповідати декілька різноманітних значень іншої змінної. Вона відображає закон множини причин і наслідків і є вільною неповною залежністю.

Кореляційний аналіз є свого роду логічним продовженням (розвитком) методу статистичних групувань, його поглибленням. Він допомагає вирішити цілий ряд нових завдань. Розрахунки на основі кореляційних моделей підвищують ступінь точності аналізу, часто виявляють недоліки попереднього аналізу. Перевага цього методу складається також в тому, що він дає можливість розв'язувати задачі, які не можна вирішити за допомогою інших методів економічного аналізу - як, наприклад, розділ впливу багатьох факторів, які діють взаємопов'язано і взаємозумовлено.

Використання методу кореляції і регресії дозволяє вирішити такі основні завдання:

- 1) встановити характер і тісноту зв'язку між досліджуваними явищами;
- 2) визначити і кількісно виміряти ступінь впливу окремих факторів і їх комплексу на рівень досліджуваного явища;
- 3) на підставі фактичних даних моделі залежності економічних показників від різних факторів розраховувати кількісні зміни аналізованого явища при прогнозуванні показників і давати об'єктивну оцінку діяльності підприємств.

Існує два типи залежності явищ: функціональний і кореляційний (стохастичний).

При **функціональному зв'язку** зміна однієї ознаки чи показника на певну величину викликає за собою зміни другої ознаки чи показника на чітко визначену величину. Такого роду залежність в її чистому вигляді зустрічається в математиці, фізиці, хімії.

При **кореляційній залежності** будь-якому значенню однієї змінної величини може відповідати декілька чи навіть безліч різноманітних, тобто варіюючих значень іншої змінної величини.

Головна відмінність кореляційної залежності від функціональної полягає в тому, що функціональний зв'язок має місце в кожному окремому випадку спостереження, а кореляційний проявляється так само лише в середньому або в цілому для всієї даної сукупності спостережень і є неточним у відношенні окремих спостережень.

Кореляційний зв'язок величин полягає в тому, що при завданні одної з них встановлюється не одне точне значення, а ймовірності різноманітних значень іншої. Таким чином, залежність виявляється не між самими величинами, а між кожною з них і відповідним математичним очікуванням іншої.

Вивчення взаємозв'язків кореляційного типу має істотне значення особливо при аналізі явищ, які складаються під впливом великої кількості певних умов.

За своїми математичними особливостями кореляційні залежності можуть бути **додатними і від'ємними**.

Коли визначається зв'язок **між двома ознаками**, кореляція називається **простою**; якщо ж явище розглядається як результат впливу **декількох факторів - множинною**.

За формою кореляційна залежність буває **прямолінійною і криволінійною**.

За напрямком – **прямою (додатною) і оберненою (від'ємною)**.

Необхідно підкреслити дві особливості, властиві кореляційному аналізу:

1) при використанні кореляційного методу вирішальне значення має всебічний попередній аналіз даних. Слід пам'ятати, що зв'язок між ознаками і властивостями не є результатом математичних розрахунків, а лежить в природі самих економічних явищ і за допомогою методів математичної статистики можна лише виразити об'єктивно існуючі закономірності економічних процесів;

2) кореляцію можна виявити, лише досліджуючи достатньо велику сукупність спостережень, оскільки кореляційні зв'язки виявляються в формі спряженого варіювання двох або кількох зіставлених ознак.

Кореляційно - регресійний аналіз включає три етапи:

1) математико - економічне моделювання ;

2) рішення прийнятої моделі шляхом знаходження параметрів кореляційного рівняння (кореляційне рівняння, за первинною пропозицією англійського статистика - математика Ф. Гальтона, називають також рівнянням регресії);

3) оцінка і аналіз одержаних результатів.

Статистичне дослідження кореляційної залежності включає завдання визначення форми зв'язку і знаходження кількісної характеристики цієї форми. Процес встановлення форми зв'язку і вибору математичного рівняння, яке могло б найбільш повно відображати характер взаємозв'язку між ознаками досліджуваного явища, має вирішальне значення в кореляційному аналізі.

Питання вибору форми зв'язку та математичного рівняння можна вирішити на основі кількісного соціально-економічного аналізу явищ, що вивчаються, використовуючи при цьому такі методи статистичного аналізу, як графічний, статистичні групування, дисперсійний аналіз та ін .

При прямолінійному зв'язку збільшення факторної ознаки (X) викликає безперечне збільшення (чи зменшення) результативної ознаки (Y) у середньому на певну величину K_{xy} .

А для оцінки сили зв'язку між випадковими величинами системи (X , Y) використовують не коефіцієнт зв'язку K_{xy} , а безрозмірне відношення

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

яке називають коефіцієнтом кореляції випадкових величин X і Y . Коефіцієнт кореляції змінюється в межах від -1 до +1, тобто: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

Якщо $r > 0$, то маємо **позитивну кореляцію**, тобто із збільшенням абсциси x , збільшується величина ординати y і навпаки при $r < 0$. Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то кореляційний момент і коефіцієнт кореляції дорівнює нулю, тобто $K_{xy} = 0$ і $r_{xy} = 0$. Дві корельовані випадкові величини завжди є взаємозалежними, але дві залежні величини не завжди є корельованими. Прикладом цього може бути система випадкових величин (X , Y) рівномірно розподілена в межах кола з центром на початку координат. Випадкові величини X і Y називають **корельованими**, якщо $r_{xy} > 0$ і при $r_{xy} = 0$ - **некорельованими**.

Коли коефіцієнт кореляції дорівнює +1 чи -1 , то між величинами X і Y існує прямолінійна залежність у вигляді рівняння прямої:

$$y = ax + b$$

Хід роботи:

1. Для системи випадкових величин (x_i , y_i) при ймовірностях їх появи p_x ; p_y скласти рівняння регресії Y та X .

Вихідні дані:

Вихідні дані	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	1	2	-3	0,4	0,5	10	-0,40	0,24	-16	8
x_2	2	4	-6	0,8	1,0	9	-0,35	0,21	-14	7
x_3	3	6	-9	1,2	1,5	8	-0,30	0,18	-12	6
x_4	4	8	-12	1,6	2,0	7	-0,25	0,15	-10	5
x_5	5	10	-15	2,0	2,5	6	-0,20	0,12	-8	4

x_6	6	12	-18	2,4	3,0	5	-0,15	0,09	-6	3
x_7	7	14	-21	2,8	3,5	4	-0,10	0,06	-4	2
x_8	8	16	-24	3,2	4,0	3	-0,05	0,03	-2	1
p_x	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,3	0,31	0,32	0,33	0,34
<i>Варіанти</i>										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	0,8	1,6	2,5	5,0	2,0	-0,8	16	-1	2	0,4
y_2	1,6	1,4	3,5	4,5	2,2	-1,6	14	-2	4	0,8
y_3	2,4	1,2	4,5	4,0	2,4	-2,4	12	-3	6	1,2
y_4	3,2	1,0	5,5	3,5	2,6	-3,2	10	-4	8	1,6
y_5	4,0	0,8	6,5	3,0	2,8	-4,0	8	-5	10	2,0
y_6	4,8	0,6	7,5	2,5	3,0	-4,8	6	-6	12	2,4
y_7	5,6	0,4	8,5	2,0	3,2	-5,6	4	-7	14	2,8
y_8	9,4	0,2	9,5	1,5	3,4	-9,4	2	-8	16	3,2
p_y	0,35	0,33	0,34	0,29	0,3	0,31	0,26	0,25	0,27	0,25

1.1. Знайти початкові моменти першого порядку при $s = 1, q = 0$ та при $s = 0, q = 1$; Початковими моментами величин X та Y будуть їх математичні сподівання:

$$\alpha_{10} = Mx = \sum_{i=1}^n (x_i * p_x)$$

$$\alpha_{10} = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\alpha_{01} = My = \sum_{i=1}^n (y_i * p_y)$$

$$\alpha_{01} = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

1.2. Знайти відхилення для кожного значення та їх добуток

Величини	1	2	3	4	5	6	7	8	Суми
$x_i - M_x$									
$y_i - M_y$									
$(x_i - M_x) * (y_i - M_y)$									
$(x_i - M_x)^2$									
$(y_i - M_y)^2$									

1.3. Знайти центральні моменти (дисперсії) при $s = 2, q = 0$ і $s = 0, q = 2$;

$$\mu_{20} = Dx = \sum_{i=1}^n (x_i - Mx)^2 * p_x \quad \mu_{20} = Dx = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\mu_{02} = Dy = \sum_{i=1}^n (y_i - My)^2 * p_y \quad \mu_{02} = Dy = \underline{\hspace{1cm}}$$

1.4. Визначити значення стандартів для дисперсій Dx і Dy

$$\sigma_x = \sqrt{Dx} = \underline{\hspace{1cm}} \quad \sigma_y = \sqrt{Dy} = \underline{\hspace{1cm}}$$

1.5. Для визначення кореляційного моменту обчислити P_{xy} ймовірність прийняття системою (x, y) значень (x_i, y_i) .

$$P_{xy} = p_x * p_y$$

$$P_{xy} = \underline{\hspace{2cm}}$$

1.6. Обчислити кореляційний момент K_{xy} та коефіцієнт кореляції r_{xy}

$$\mu_{11} = K_{xy} = \sum_{i=1}^n ((x_i - Mx) * (y_i - My)) * P_{xy}$$

$$\mu_{11} = K_{xy} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$r_{xy} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

1.7. Знайти коефіцієнт регресії $\rho_{y/x}$

$$\rho_{y/x} = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$\rho_{y/x} = \underline{\hspace{2cm}} * \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

1.8. Використовуючи коефіцієнт регресії $\rho_{y/x}$, значення початкових моментів першого порядку α_{10} та α_{01} запишіть рівняння регресії у вигляді $y = \alpha_{01} + \rho_{y/x} (x - \alpha_{10})$ та приведіть його до вигляду:
 $y = ax + b$.

1.9. Зробити висновки

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Львів: ЛьвДУВС, 2017. 292 с.
2. Слюсарчук П. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Ужгород: Карпати, 2005. 178 с.
3. Соколенко О. І. Вища математика. К.: Видавничий центр «Академія», 2002. 432 с.
4. Теорія ймовірностей. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.В. Барабаш, А.П. Мусієнко, О.В. Свинчук. Електронні текстові дані (1 файл: 3705 Кбайт). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 193 с.