МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УМАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ САДІВНИЦТВА

Кафедра математики і фізики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

частина І

Конспект лекцій

2024

Курс лекцій з навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів першого рівня вищої освіти (бакалаврський) спеціальності 193 Геодезія та землеустрій освітньої програми Геодезія та землеустрій. – Умань: Уманський НУС, 2024. - 165 с.

Розробник: Іван ПОБЕРЕЖЕЦЬ кандидат технічних наук, доцент
__________________(Іван ПОБЕРЕЖЕЦЬ)

Курс лекцій затверджений на засіданні кафедри математики і фізики.
Протокол від “__08__”____08_______2024 року № __1_
Завідувач кафедри ______________(Леонід КОВАЛЬОВ)
“_____”___________________ 2024 року

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Курс вищої математики відіграє важливу роль в підготовці фахівців вищої кваліфікації для аграрного сектору країни. Математична освіта розкриває широкі можливості для підготовки високоосвічених, грамотних фахівців, які вміють логічно і аналітично мислити, зіставляти і порівнювати, користуватися різними математичними методами моделювання, проектування, планування.

Навчальний посібник "Вища математика" призначено для студентів інженерно-технологічного факультету денної та заочної форми навчання. Матеріали посібника подано у двох частинах та охоплюють всі розділи вищої математики, які необхідні для інженерно-техчної освіти.

Першу частину посібника присвячено лінійній і векторній алгебрі, аналітичній геометрії та диференціальному численню функції однієї змінної.

Друга частина посібника містить у собі такі розділи: інтегральне числення функції однієї змінної, диференціальне числення функцій де-кількох змінних, кратні, криволінійні інтеграли, а також диференціальні рівняння та числові та функціональні ряди.

В запропонованому навчальному посібнику здійснена спроба нового підходу до структурування і викладу змісту курсу вищої математики на принципах модульно-рейтингової системи навчання. При цьому зміст навчальної дисципліни залишається незмінним, і відповідає базовій навчальній програмі для вищих аграрних закладів.

Посібник дає змогу студентам оволодіти прийомами й методами розв'язування задач та прикладів при вивченні вищої математики.

Посібник створений для успішного засвоєння основних математичних понять, та вмінням студентів застосовувати отримані знання до розв'язку задач з конкретним фізичним і геометричним змістом.

Посібник містить короткі теоретичні відомості, типові приклади, розв'язані з детальними поясненнями, довідниковий матеріал, а також завдання з прикладною спрямованістю для самостійної роботи студентів.

Методика і форма викладання матеріалу в посібнику сприяють індивідуалізації навчального процесу і якісному засвоєнню навчальної програми.

Автори сподіваються, що навчальний посібник буде корисним як викладачам вищої математики вищих навчальних закладів в їх підготовці та проведенні занять, контролі рівня знань студентів, так і студентам в їх самостійній роботі.

Розділ 1

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. Визначники

1.1. Визначники другого та третього порядків

Поняття визначника виникло в зв'язку з проблемою відшукання формул для обчислення значень невідомих при розв'язуванні систем лінійних рівнянь.

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь із двома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Таблицю чисел A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називають *матрицею* другого порядку , а самі числа a_{11}, a_{22}, a_{21}, a_{12} – її елементами або членами.

Зауваження: перший з нижніх індексів указує номер рядка, а другий – стовпця, на перетині яких знаходяться елемент.

Визначником (детермінантом) другого порядку матриці A (визначником другого порядку) називають число $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ і позначають

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{31}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Таблицю чисел A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називають *матрицею третього порядку* , а самі числа – її елементами.

Визначником (детермінантом) третього порядку матриці A (визначником третього порядку) називають число $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$ і позначають

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Поняття ”визначник “(від латинського determino – визначаю) ввів німецький математик Г.В. Лейбніц (1646-1716).

Символи a_{ij} називають *елементами визначника*, в якому індекс *і* вказує номер рядка, а індекс *j* – номер стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

Визначник третього порядку обчислюють за правилом трикутників (*правилом Саррюса*)*:* перші три доданки є добутками елементів головної діагоналі і елементів вершин трикутників з основами, паралельними головній діагоналі.Три останні доданки мають від’ємний знак. Вони є добутками елементів неголовної діагоналі та елементів вершин трикутників з основами, паралельними неголовній діагоналі (рис. 1.1).

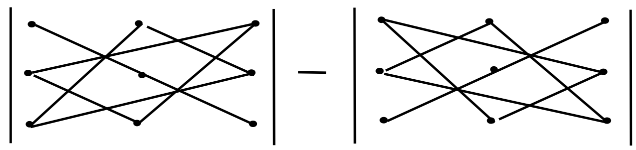


Рис. 1.1.

Приклад 1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$,   б) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв’язання. а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 1 = 10 + 3 = 13$.

$$б) \begin{vmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 3 + (-4) \cdot (-4) \cdot 7 + 4 \cdot 0 \cdot 8 - 8 \cdot 5 \cdot 7 - 4 \cdot (-4) \cdot 3 - (-4) \cdot 0 \cdot 3 =$$

$$= 45 + 112 + 0 - 280 + 48 + 0 = -75.$$

1.2. Властивості визначників

1°. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями.

2°. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.

3°. Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.

4°. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.

5°. Спільний множник, який мають усі елементи деякого рядка (стовпця) , можна винести за знак визначника.

6°. Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7°. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка(стовпця), помножені на одне й те саме число.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називають визначник (n–1)-го порядку, отриманий із даного шляхом викреслення i-го рядка і j- го стовпця , на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

Наприклад, мінорами M_{23} і M_{31} визначника $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 5 & 6 & -4 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ будуть

визначники $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}$ і $M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називають мінор цього елемента, взятий із знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Отже, алгебраїчне доповнення A_{23} даного визначника дорівнює: $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = -18$.

8°. Сума добутків елементів рядка (стовпця) на свої алгебраїчні доповнення дорівнює значенню визначника.

9°. Сума добутків елементів рядка або стовпця визначника n-го порядку на алгебраїчні доповнення до елементів іншого рядка або стовпця цього самого визначника дорівнює нулю.

Приклад 2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & 7 & 1 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами будь-якого рядка чи стовпця.

Розв'язання. Для розкладання визначника за елементами деякого рядка чи стовпця використаємо властивість 8°. Розкладемо визначник за елементами другого стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & 7 & 1 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 7\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(-12-8)+7(4-24)+2(1+9) = 60-140+20 = -60.$$

1.3. Визначники *n*-го порядку

Таблиця n^2 чисел a_{ij}, де i, j набувають всіх значень від 1 до n, виду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

називають матрицею *n*-го *порядку*, а самі числа a_{ij} – її елементами, або членами.

Визначником n-го порядку матриці A *n*-го порядку називають суму всіх можливих добутків елементів матриці, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця. Знак кожного добутку дорівнює $(-1)^s$, де s – число інверсій у перестановці других індексів елементів, при умові, що перші індекси розміщені в порядку зростання.

Очевидно, визначник *n*-го порядку складатиметься із $n!$ доданків, кожний з яких містить *n* множників.

***Приклад* 3.** Встановити знак доданка $a_{34}a_{12}a_{21}a_{43}$ визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

***Розв'язання*.** Розмістимо елементи добутку в порядку зростання перших індексів $a_{34}a_{12}a_{21}a_{43} = a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$. Оскільки число інверсій у перестановці других індексів 2, 1, 4, 3 дорівнює $s = 1 + 1 = 2$, то $(-1)^s = (-1)^2 = 1$. Отже, знак доданка буде "+".

Теорема 1. Знак кожного доданка визначається виразом $(-1)^{t+s}$, де t – число інверсій, які утворюють перші індекси, а s – другі.

***Приклад* 4.** Встановити знак доданка $a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}$ визначника Δ із попереднього приклада.

***Розв'язання*.** Знаходимо число інверсій: у перестановці перших індексів 3, 4, 2, 1 $t = 2 + 2 + 1 = 5$ і других – 1, 2, 3, 4 $s = 0$. Тоді згідно теореми 1 матимемо $(-1)^{t+s} = (-1)^{5+0} = -1$. Отже, знак доданка буде "–".

Запитання для самоперевірки

1. Що називають визначником другого порядку?
2. Що називають визначником третього порядку?
3. Сформулювати означення визначника *n*-го порядку.
4. Як встановити знак кожного доданка у визначнику?
5. Які перетворення не змінюють значення визначника?
6. При яких перетвореннях змінюється знак визначника?
7. У яких випадках визначник дорівнює нулю?
8. Дати означення мінора елемента a_{ij}.
9. Що називається алгебраїчним доповненням елемента a_{ij}?
10. Чому дорівнює сума добутків елементів рядка (стовпця) на свої алгебраїчні доповнення?
11. Чому дорівнює сума добутків елементів рядка (стовпця) на відповідні чужі алгебраїчні доповнення?
12. Сформулювати властивості визначників.

Навчальні завдання

1. Обчислити визначники другого порядку.

а) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ *б*) $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$; *в*) $\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; *г*) $\begin{vmatrix} -7 & -4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$; *д*) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & -4 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити визначники третього порядку.

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ *б*) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -7 \\ 4 & -6 & 6 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; *в*) $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & 3 \\ -7 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; *г*) $\begin{vmatrix} -8 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix}$; *д*) $\begin{vmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 0 & -6 & 9 \\ 9 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити значення визначника, користуючись їх властивостями.

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 18 & 1 & 0 \\ 15 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 3 \\ 3 & 12 & 5 \end{vmatrix}$; *д*) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}$

4. Обчислити визначник, розклавши його за елементами деякого стовпчика чи рядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 4 & y-3 & 7 \\ 6 & 7 & z+1 \\ x & 4 & 1 \end{vmatrix}$; *д)* $\begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix}$.

5. Обчислити визначники четвертого порядку.

а) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

6. Знайти розв’язки рівняння чи нерівності:

а) $\begin{vmatrix} x^2 & 8 & 0 \\ x & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$; *б)* $\begin{vmatrix} x & x^2 & 9 \\ -2 & 4 & 9 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} > 0$; *в)* $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 16 \\ x & 0 & x^2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \le 0$.

§2. Матриці

2.1. Дії з матрицями

Матрицею розмірності $m \times n$ називають прямокутну таблицю упорядкованих чисел або будь-яких інших об'єктів, яка містить *m* рядків і *n* стовпців.

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$ де *i* = 1, 2,.., *m*; *j* = 1, 2, ..., *n*

Числа a_{ij} називають *елементами матриці*.

Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців, то матриця називається *квадратною*.

Елементи з двома однаковими індексами a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... a_{nn} утворюють *головну діагональ* квадратної матриці.

Квадратну матрицю, в якої елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші нулю, називають *одиничною матрицею*:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність визначник, який складається з тих самих елементів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо такий визначник відмінний від нуля, то матрицю називають *неособливою*, або *невиродженою*. Якщо визначник дорівнює нулю, то матриця *особлива*, або *вироджена*.

Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони мають однакову розмірність і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Якщо в квадратній матриці *A* рядки замінити відповідними стовпцями отримаємо транспоновану матрицю A^{T} .

Коли всі елементи матриці, що містяться нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю, то матрицю називають *ступінчастою.*

Сумою матриць $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ однакової розмірності називають матрицю $C=(c_{ij})$ цієї розмірності, з елементами $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Приклад 1. Обчислити суму матриць

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обидві матриці мають розмірність 3×4, тому можна знайти їх суму:

$$C = A+B = \begin{pmatrix} 5+0 & -8+1 & 0+2 & 2-1 \\ 4+5 & 3+6 & 1-7 & 2+10 \\ -1+1 & 2-3 & -7+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ на деяке число *k* називається матриця *C* = (c_{ij}) , кожен елемент якої дорівнює добутку відповідних елементів матриці *A* на *k*,

$$C = k\,A = (c_{ij}) = (ka_{ij}).$$

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ розмірності $m\times p$ на матрицю $B=(b_{ij})$ розмірності $p\times n$ називають таку матрицю $C=(c_{ij})$ розмірності $m\times n$, з елементами

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \;.$$

Тобто кожний елемент матриці *C* утворюється як сума добутків відповідних елементів *i*-го рядка матриці *A* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *B* (рис.1.2).

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{pj} & \vdots \end{pmatrix}$$

Рис. 1.2.

Властивості дій з матрицями

а) Операції додавання:

1) A + B = B + A (комутативність);

2) (A + B) + C = A + (B + C) (асоціативність);

б) Операції множення матриці на число:

1) $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$ (комутативність);

2) $(\lambda + \eta) \cdot A = \lambda A + \eta A$; (дистрибутивність відносно суми чисел);

3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (дистрибутивність відносно суми матриць);

в) Операції множення матриць:

1) $A \cdot B \neq B \cdot A$ (антикомутативність);

2) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (асоціативність);

3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Зауваження. Множення матриць можна здійснювати в тому випадку, коли вони *узгоджені,* тобто кількість елементів у рядку першої матриці дорівнює кількості елементів у стовпчику другої матриці.

Приклад 2. Знайти добуток матриць.

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot4+5\cdot5+6\cdot0 & 2\cdot3+5\cdot7+6\cdot7 \\ 3\cdot4+4\cdot5+1\cdot0 & 3\cdot3+4\cdot7+1\cdot7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 83 \\ 32 & 44 \end{pmatrix}.$$

2. 2. Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається *оберненою* матрицею до квадратної матриці A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

якщо виконується рівність:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою, при цьому

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^T = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \text{ або}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{2n}}{\Delta} \\ \dots & & & \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці

Приклад 3. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5.$$

$\Delta(A) \neq 0$ — обернена матриця існує.

Знайдемо A_{ij} алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці за формулою $A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що матриця A^{-1} є оберненою до матриці A. Знайдемо AA^{-1}:

$$A\cdot A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}15-10 & 12-12 & -3+3\\ -10+10 & -8+12+1 & 2-3+1\\ 10-10 & 8-12+4 & -2+3+4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2.3. Ранг матриці

Визначник, побудований на елементах, що стоять на перетині будь-яких *k* рядків і *k* стовпців матриці $A=(a_{ij})$ розмірності $m\times n$, називається *мінором k-го порядку* матриці А ($k\le\min(m,n)$). Один елемент матриці є мінором 1-го порядку.

Рангом матриці *A* розміром $m\times n$ називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора, утвореного з елементів цієї матриці.

Іншими словами число, *r* є рангом матриці, якщо серед мінорів *r*-го порядку є принаймні один, відмінний від 0, а всі мінори вищих порядків дорівнюють 0.

Ранг матриці позначають:

$$r = rangA.$$

Ранг нульової матриці дорівнює 0.

Приклад 4. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 6 & 4 & 8\\ 4 & 0 & -6\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки мінор другого порядку

$$r_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}=4-12=-8$$

відмінний від нуля 0, то обчислимо мінор третього порядку

$$r_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\ 6 & 4 & 8\\ 4 & 0 & -6\end{vmatrix}=-24+0+64-112+72-0=0.$$

Отже, ранг матриці, згідно означення, дорівнює *r* = 2.

Ранг матриці можна знаходити безпосередньо за означенням. Найбільш ефективним методом є метод елементарних перетворень.

Елементарними перетвореннями матриці *A* називають такі перетворення:

1) заміна місцями двох рядків або двох стовпців матриці;

2) множення рядка або стовпця матриці на будь-яке відмінне від нуля число;

3) додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помноженого на деяке число.

Використовуючи те, що елементарні перетворення не змінюють ранг матриці, будь-яку не нульову матрицю за допомогою елементарних перетворень і відкиданням нульових рядків можна звести до матриці ступінчатого виду. Ранг ступінчастої матриці дорівнює кількості рядків цієї матриці.

Матриці, які мають рівні ранги, називають *еквівалентними* матрицями. Еквівалентні матриці об'єднують знаком «~» («тильда»).

Приклад 5. Знайти за допомогою елементарних перетворень ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\4&3&2&1\\8&7&6&5\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Залишимо без зміни перший рядок матриці і, помноживши його відповідно на –5, –4 і –8, додамо до наступних рядків.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\4&3&2&1\\8&7&6&5\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-5\cdot 1p+2p\\-4\cdot 1p+3p\\-8\cdot 1p+4p\end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&-5&-10&-15\\0&-9&-18&-27\end{pmatrix}.$$

Розділимо другий, третій і четвертий рядки відповідно на –4, –5 і –9.

$$A\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&-5&-10&-15\\0&-9&-18&-27\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&1&2&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}.$$

Залишимо без зміни перші два рядки і віднімемо другий рядок від наступних.

$$A\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&1&2&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Нарешті опускаємо нульові рядки $A\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\end{pmatrix}$.

Отримали матрицю ступінчастого вигляду, яка містить два рядки, тому її ранг *rangA* = 2.

Запитання для самоперевірки

1. Що називають матрицею розмірності $m \times n$?
2. Яка матриця називається нульовою? діагональною? трикутною?
3. Які матриці називаються рівними?
4. Яка матриця називається одиничною? Властивість одиничної матриці.
5. Як додаються матриці? Властивості додавання матриць.
6. Як множиться матриця на число? Властивості множення матриці на число.
7. Як множаться матриці? Властивості множення матриць.
8. Яка матриця називається оберненою до матриці А?
9. Яка матриця називається невиродженою?
10. Яку структуру має обернена матриця?
11. Записати систему рівнянь і її розв′язок у матричній формі.
12. Що називається рангом матриці А?
13. Які перетворення матриці називають елементарними?
14. Які перетворення матриці не змінюють її рангу?
15. Яку матрицю називають ступінчастою?
16. Чому дорівнює ранг матриці ступінчастого вигляду?
17. Як знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень?

Навчальні завдання

8. Знайти добутки матриць:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 & -17 \\ 5 & 2 & -6 \\ 10 & 5 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -18 & 10 \\ 31 & -17 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Знайти матрицю $A = (2B - 3C)D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Знайти матриці, обернені до заданих матриць і зробити перевірку.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Знайти ранги матриць:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 10 & 16 & 9 & 7 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

§3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, кількість яких дорівнює кількості невідомих

3.1. Теоретичні відомості

Предметом розгляду лінійної алгебри є насамперед теорія систем лінійних рівнянь. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, кількість яких дорівнює кількості невідомих в загальному вигляді можна подати так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (3.1).$$

де x_1, x_2, ..., x_n — невідомі; a_{ij} $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$ — коефіцієнти системи рівнянь; b_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ — вільні члени, або праві частини системи рівнянь. Якщо всі $b_i = 0$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$, то систему лінійних рівнянь називають *однорідною*.

Розв'язком системи рівнянь є множина таких чисел k_1, k_2, ..., k_n, у результаті підставляння яких замість відповідних невідомих x_1, x_2, ..., x_n у кожне з рівнянь системи останні перетворюються на правильні числові рівності.

Якщо система рівнянь не має жодного розв'язку, вона називається *несумісною*, а якщо має хоча б один розв'язок — *сумісною*. Сумісна система рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо розв'язків більш як один.

Зауваження. Однорідна система рівнянь завжди сумісна, тому що її задовольняє нульовий тривіальний розвязок $x_1 = 0$, $x_2 = 0$,… $x_n = 0$.

Коефіцієнти системи утворюють *основну матрицю системи*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Визначник цієї матриці називають *основним визначником системи* і позначають $|A|$ або Δ.

Зауваження. Для правильного запису основної матриці або основного визначника системи (3.1) треба бути уважним і записати в *i* рядок коефіцієнти *i*-го рівняння, а в *k* стовпець коефіцієнти при $x_к$. Якщо в деякому рівнянні немає якогось невідомого, то це означає, що відповідний коефіцієнт дорівнює нулю.

3.2. Формули Крамера

Якщо основний визначник Δ неоднорідної системи *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами

$$x_i = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k = 1, 2....$$

де Δ_k – допоміжний визначник системи, який одержується шляхом заміни *к*-го стовпця визначника Δ стовпцем вільних членів системи.

Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один допоміжний визначник системи не дорівнює нулю то система не має розв'язків. Якщо $\Delta = \Delta_к = 0$, то система має безліч розв'язків.

Приклад 1. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 3x - 4y = 1, \\ -5x + 6y = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 3x + y - z = 2, \\ 2x - y - z = 3. \end{cases}$

Розв'язання.

а) Знаходимо визначники Δ, $Δ_x$, $Δ_y$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -2; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -2; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

За формулами Крамера $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 3 + 2 + 3 - 1 = 8 - 4 = 4 \neq 0;$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - 2 - 3 - 2) = 4;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&0&-1\\3&2&-1\\2&3&-1\end{vmatrix}=-2-9+4+3=-4; \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&0\\3&1&2\\2&-1&3\end{vmatrix}=3+4-9+2=0.$$

Підставимо знайдені визначники до формул Крамера і одержимо:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{4}{4}=1; \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-4}{4}=-1; \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{0}{4}=0.$$

3.3. Матричний спосіб розв'язування систем рівнянь

Розглянемо систему (3.1) рівнянь. Утворимо матриці: *A* — коефіцієнтів при невідомих, *X* — невідомих, *B* — вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&&&\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}.$$

Тоді згідно з означенням добутку матриць систему рівнянь можна записати в матричному вигляді:

$$AX=B.$$

Якщо матриця *A* має обернену матрицю A^{-1}, то

$$X=A^{-1}B.$$

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases}2x_1+5x_2-2x_3=-9\\-3x_1-4x_2=1\\x_1+x_2+x_3=3\end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему в матричному вигляді $AX=B$, де

$$A=\begin{pmatrix}2&5&-2\\-3&-4&0\\1&1&1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-9\\1\\3\end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \qquad |A|=5$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-4&0\\1&1\end{vmatrix}=-4; \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-3&0\\1&1\end{vmatrix}=3; \qquad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-3&-4\\1&1\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5&-2\\1&1\end{vmatrix}=-7; \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&-2\\1&1\end{vmatrix}=4; \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&5\\1&1\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5&-2\\-4&0\end{vmatrix}=-8; \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&-2\\-3&0\end{vmatrix}=6; \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&5\\-3&-4\end{vmatrix}=7;$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4 & -7 & -8\\ 3 & 4 & 6\\ 1 & 3 & 7\end{pmatrix}.$$

$$X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4 & -7 & -8\\ 3 & 4 & 6\\ 1 & 3 & 7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-9\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}(-4)\cdot(-9)+(-7)\cdot 1+(-8)\cdot 3\\ 3\cdot(-9)+4\cdot 1+6\cdot 3\\ 1\cdot(-9)+3\cdot 1+7\cdot 3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5\\ -5\\ 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix}.$$

$x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=3$.

Отже, $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=3$ — розв'язок системи.

Запитання для самоперевірки

1. Що називається розв'язком системи?
2. Записати формули Крамера для системи лінійних рівнянь.
3. Скільки розв′язків може мати система лінійних рівнянь? Чому?
4. Яка система називається однорідною?
5. Скільки розв′язків може мати однорідна система лінійних рівнянь?
6. Записати систему рівнянь і її розв′язок у матричній формі.

Навчальні завдання

12. Розв'язати за допомогою визначників систему рівнянь:

а) $\begin{cases}2x-3y=-10,\\ -5x+2y=3;\end{cases}$ *б*) $\begin{cases}7x-9y=14,\\ -5x+8y=-10;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=0;\\ 3x_2+4x_3=-6;\\ x_1+x_3=1.\end{cases}$ *г*) $\begin{cases}-2x_1+x_2=-6;\\ x_1-2x_2-x_3=5;\\ 3x_1+4x_2-2x_3=13.\end{cases}$

д) $\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3+x_4=-3;\\ 3x_1-x_2+2x_3+4x_4=8;\\ x_1+x_2+3x_3-2x_4=6;\\ -x_1+2x_2+3x_3+5x_4=3.\end{cases}$

13. Звести до матричного вигляду системи рівнянь і розв'язати методом оберненої матриці:

а) $\begin{cases}3x-5y=13,\\ 2x+7y=81;\end{cases}$ *б*) $\begin{cases}3x-4y=-6,\\ 3x+4y=18;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x_1-3x_2-x_3=-6;\\ 3x_1+4x_2+3x_3=-5;\\ x_1+x_2+x_3=-2.\end{cases}$ *г*) $\begin{cases}-2x_1+x_2=-6;\\ x_1-2x_2-x_3=5;\\ 3x_1+4x_2-2x_3=13.\end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5; \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

§4. Дослідження та розв'язування довільних системи лінійних алгебраїчних рівнянь

4.1. Теоретичні відомості

Розглянемо систему з m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2).$$

Сукупність чисел $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2, \ldots$ $x_n=\alpha_n$ називається розв′язком системи, якщо при підстановці цих чисел у кожне з рівнянь системи одержуємо тотожності.

Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв′язок і *несумісною*, якщо немає жодного.

Система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв′язок і *невизначеною*, коли їх більше.

Розглянемо дві матриці, пов′язані із даною системою :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Матриця A є матрицею системи, а матриця B називається *розширеною матрицею* системи.

Теорема Кронекера-Капеллі. Система буде сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи. Якщо $rang A = rang B = n$, то система *визначена*. Коли $rang A = rang B < n$, то система *невизначена*.

Нехай $rang A = rang B = r$. Якщо $r < n$, то це означає, що у системі є лише r лінійно незалежних рівнянь всі інші (n-r) рівнянь отримуються з даних шляхом алгебраїчних перетворень.

Лінійно незалежними будуть ті r рівнянь на коефіцієнтах яких можна побудувати визначник $r^{го}$ порядку відмінний від 0. Розглядаємо лише ці лінійно незалежні рівняння, а решту відкидаємо.

Нехай *rang A* = *rang B*= $r<n$. В цьому випадку виділяються *r* змінних, які називають *головними.* За головні змінні вибирають ті змінні на коефіцієнтах при яких можна побудувати визначник *r* порядку, відмінний від 0. Всі інші змінні називають *вільними*.

Зауваження. Комбінацій головних змінних може бути декілька.

Для того, щоб отримати *загальний* розв′язок системи потрібно головні змінні виразити через вільні. Розв′язок отриманий при конкретних значеннях вільних змінних називається *частковим*.

Якщо вільним змінним надати нульові значення, то такий розв′язок називається *базисним* .

Якщо у базисному розв′язку нулю дорівнюють і головні змінні, то такий розв′язок називається *виродженим*.

Якщо у базисному розв′язку головні змінні набувають додатніх значень, то такий розв′язок називається *допустимим*.

Прилад 1. Розв′язати систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 14 \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи. За допомогою елементарних перетворень знайдемо її ранг.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & -1 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ & & & \end{pmatrix}$$

Очевидно *rang A* = *rang B*= *2*. Це означає, що система сумісна, невизначена (3 змінних). Головних змінних буде 2. Виберемо їх.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0$$

Оскільки жоден з визначників не дорівнює 0, то в якості головних змінних можуть бути вибрані x_1 і x_2, або x_1 і x_3, чи x_2 і x_3.

Візьмемо в ролі головних змінних x_1 і x_2. Маємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ \quad x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 + 5 \\ \quad x_2 = -3x_3 - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 + 6 + x_3 + 5 \\ \quad x_2 = -3x_3 - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_3 + 11 \\ \quad x_2 = -3x_3 - 6 \end{cases} -$$

загальний розв′язок системи.

Знайдемо один з частинних розв′язків, для цього надамо вільні змінні x_3 конкретного значення, наприклад: x_3=5, тоді x_1=31; x_2=-21.

4.2. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь

Цей метод пов'язаний із послідовним виключенням невідомих із системи рівнянь. За допомогою елементарних перетворень систему (2) приводять до системи вигляду

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \bar{a}_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \bar{a}_{22}x_2 + \ldots + \bar{a}_{2j}x_j + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \qquad\qquad \bar{a}_{ij}x_j + \ldots + \bar{a}_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_m \end{cases} \qquad (3)$$

Таку систему рівнянь називають *ступінчастою* або *трапецеподібною*.

Якщо система (3) містить рівняння виду $0 = b_i$ і $b_i \neq 0$, то вона несумісна.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо перше рівняння, помножене на –1 і –2, відповідно до другого і третього рівнянь. Отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 6, \\ \quad x_2 + 2x_3 = -1, \\ \quad -3x_2 + 8x_3 = -11. \end{cases}$$

Множимо друге рівняння на –3 і додаємо до третього.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 6, \\ \quad x_2 + 2x_3 = -1, \\ \qquad 14x_3 = -14. \end{cases}$$

Поділивши третє рівняння на 14, отримаємо систему трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 6, \\ \quad x_2 + 2x_3 = -1, \\ \qquad x_3 = -1. \end{cases}$$

Послідовно знаходимо: $x_3 = -1$; $x_2 = 1$; $x_1 = 2$.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Помножимо перше рівняння на –2 і додамо до другого. Далі помножимо перше рівняння на -3 і додамо до третього.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -10, \\ \quad -x_2 - 2x_3 - 13x_4 = 12, \\ \quad -2x_2 - 14x_3 - 18x_4 = 34. \end{cases}$$

Розділимо третє рівняння на -2 і додамо до другого:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -10, \\ \quad -x_2 - 2x_3 - 13x_4 = 12, \\ \qquad 5x_3 - 4x_4 = -5. \end{cases}$$

Виразимо з останнього рівняння змінну x_3 через x_4.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -10, \\ \quad -x_2 - 2x_3 - 13x_4 = 12, \\ \qquad x_3 = \frac{4}{5}x_4 + 1. \end{cases}$$

Підставляючи це значення, послідовно отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{178}{5}x_4 + 7, \\ x_2 = \frac{73}{5}x_4 - 10, \\ x_3 = \frac{4}{5}x_4 + 1. \end{cases}$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається розв'язком системи?
2. Яка система є сумісною? несумісною? визначеною? невизначеною?
3. Яка матриця називається розширеною?
4. Сформулювати теорему Кронекера-Капеллі.
5. Які змінні можна вибрати за головні?
6. Як отримують загальний розв'язок системи?
7. Який розв'язок є частковим? базисним? виродженим? допустимим?

Навчальні завдання

14. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x-3y=-10, \\ -5x+2y=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x-9y=14, \\ -5x+8y=-10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0; \\ 3x_2+4x_3=-6; \\ x_1+x_3=1. \end{cases}$

г) $\begin{cases} -2x_1+x_2=-6; \\ x_1-2x_2-x_3=5; \\ 3x_1+4x_2-2x_3=13. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=-3; \\ 3x_1-x_2+2x_3+4x_4=8; \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4=6; \\ -x_1+2x_2+3x_3+5x_4=3. \end{cases}$

15. Дослідити сумісність і знайти розв'язок системи:

а) $\begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3+x_4=7 \\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=1 \\ x_1-3x_2-6x_3+5x_4=0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7 \\ 3x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$

Розділ 2
ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. Вектори. Лінійні дії над ними

Величини, які повністю характеризуються числовим значенням (об′єм, площа і т. д.) називаються *скалярними*.

Вектором називають будь-яку величину, що має напрям (наприклад, сила, що діє на матеріальну точку, прискорення, швидкість).

У геометрії *вектором* називають напрямлений відрізок. Напрям вектора вказується стрілкою. Розрізняють початок і кінець вектора.

Позначають: $\vec{a}$; $\vec{AB}$.

Довжиною вектора або його *модулем* називають довжину відрізка, що задає цей вектор.

Позначають: $|\vec{a}|$ $|\vec{AB}|$.

Вектор називають *нульовим (нуль-вектор)*, якщо його довжина дорівнює нулю, тобто початок співпадає з кінцем.

Одиничним називають вектор, довжина якого дорівнює одиниці. Одиничний вектор має той самий напрям, що й вектор $\vec{a}$, позначають $\vec{a}^{\circ}$.

Два вектори називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній, або на паралельних прямих.

Позначають: $\vec{a} \| \vec{b}$, якщо вектори *співнаправлені*, то позначають $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, якщо *протилежно направлені* — $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Два вектори називають *рівними*, якщо вони мають однакову довжину і напрям.

Вектор, колінеарний даному вектору $\vec{a}$, рівний йому за модулем і протилежно напрямлений, називають *протилежним вектором* для вектора $\vec{a}$ і позначають $-\vec{a}$.

Вектори називають *компланарними*, якщо вони лежать в одній чи паралельних площинах.

Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, початок якого співпадає з початком вектора $\vec{a}$, а кінець з кінцем вектора $\vec{b}$, при умові, що початок вектора $\vec{b}$ співпадає з кінцем вектора $\vec{a}$.

Таке правило додавання називається *правилом трикутника* (рис. 2.1).

Правило паралелограма. Якщо вектори мають спільний початок, то їх сумою буде вектор, що являє собою діагональ паралелограма побудованого на цих векторах, як на сторонах (рис. 2.2).

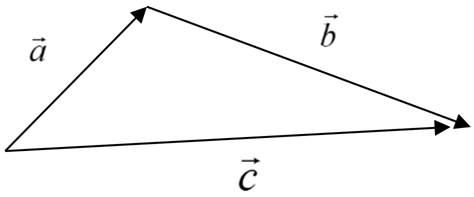


Рис. 2.1.

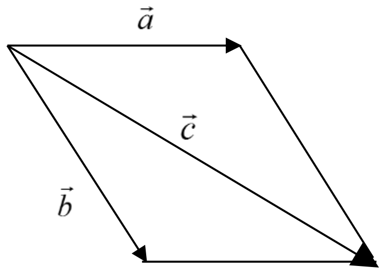


Рис. 2.2.

Різницею векторів $\vec{a}$ – $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, для якого виконується рівність $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ (рис. 2.3).

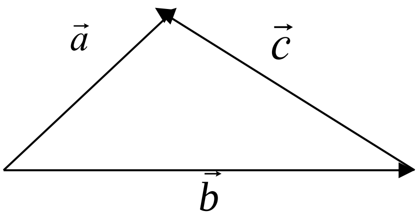


Рис. 2. 3.

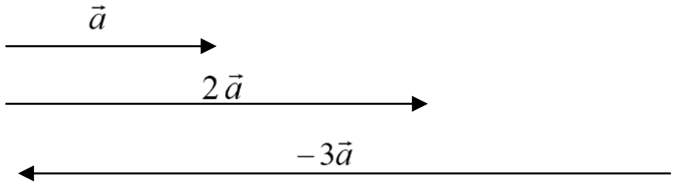


Рис. 2. 4.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\vec{c}$ (рис. 2.4)., який задовольняє умови:

1) $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

2) якщо $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$;

3) якщо $\lambda < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

Властивості дій над векторами:

1. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$

2. $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ — дистрибутивність відносно додавання чисел і відносно додавання векторів.

3. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$ — асоціативність.

4. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

5. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq 0$, то завжди знайдеться таке число λ, що $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$.

Сукупність упорядкованих систем з *n* дійсних чисел, для яких визначено дії додавання і множення на число, утворює *n- вимірний векторний простір* V_n.

Елементами заданого таким чином простору будуть впорядковані системи чисел, які називатимемо *n-вимірними векторами* і записуватимемо: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$. Числа a_i, i = 1, 2,..., *n* називають *компонентами вектора* $\vec{a}$.

Вектор $\vec{b}$ називають *лінійною комбінацією векторів* $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$, якщо існують такі числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n_s}$, що $\vec{b}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$.

Систему векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ називають *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n_s}$ хоча б одне з яких відмінне від нуля, що виконується рівність

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_r\vec{a}_r=0\cdot$$

Якщо рівність можлива лише у випадку, коли всі $\lambda_i=0\quad i=1,2,\ldots,n$, то система векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ називається *лінійно незалежною*.

Базисом векторного простору називають систему лінійно незалежних векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ таку, що будь-який вектор лінійного простору може бути представлений у вигляді їх лінійної комбінації.

$$\vec{b}_i=\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}\vec{a}_j,\ i=1,2,\ldots,n$$

Координатами вектора у базисі називають коефіцієнти розкладу цього вектора по базису.

Зауваження. Для базису має важливе значення порядок слідування векторів.

Розклад вектора по базису єдиний.

Довільну впорядковану (взята в певному порядку) трійку некомпланарних векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ називають *базисом простору.* Будь-який вектор $\vec{b}$ простору можна розкласти за базисом $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$:

$$\vec{b}=\lambda_1\cdot\vec{a}_1+\lambda_2\cdot\vec{a}_2,+\lambda_3\cdot\vec{a}_3,$$

де $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ — координати вектора $\vec{b}$ у цьому базисі: $\vec{b}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.

Базисом на площині називають два неколінеарних вектори, взяті в певному порядку.

Базисом на прямій називають довільний ненульовий вектор на цій прямій.

Запитання для самоперевірки

1. Що називають вектором?
2. Що таке довжина вектора?
3. Які вектори називають колінеарними? компланарними? рівними?
4. Який вектор називають нульовим?
5. Що називають сумою векторів?
6. Властивості додавання векторів.
7. Які правила додавання векторів вам відомі?
8. Що називають різницею векторів?
9. Що таке добуток вектора на число?
10. Сформулюйте властивості множення вектора на число.
11. Що називають лінійною комбінацією векторів?
12. Яку систему векторів називають лінійно залежною? лінійно незалежною?
13. Що називають базисом лінійного простору?
14. Що розуміють під розмірністю лінійного простору?

Навчальні завдання

1. Побудувати довільні неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти :

а) $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$; *б)* $\vec{d} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$; *г)* $\vec{l} = \frac{2}{5}\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$.

2. В ромбі *ABCD* дано діагоналі $\overrightarrow{AC} = \vec{a},\ \overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Розкласти за цими векторами всі вектори, що збігаються зі сторонами ромба: $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{DA}$.

3. Три вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{c},\ \overrightarrow{BC} = \vec{a},\ \overrightarrow{CA} = \vec{b}$ є сторонами трикутника. За допомогою векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ виразити медіани трикутника $\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BN},\ \overrightarrow{CP}$.

4. Побудувати вектор $\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{D_1C_1}$, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед.

5. Побудувати вектор $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1B}$, якщо $ABCA_1B_1C_1$ – призма.

6. Побудувати вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$, якщо ABCD – тетраедр.

7. Побудувати будь які вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{q}\ і\ \vec{s}$. Знайти: $\vec{r} = 2\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ і

$\vec{p} = -1{,}5\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + 2\vec{s}$. Розкласти вектори $\vec{q}$ і $\vec{s}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{c}$.

§2. Системи координат

Афінною системою координат в просторі називають сукупність точки *O* і базису, що задається векторами $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.

Точку *O* називають *початком координат*; прямі, що проходять через початок координат в напрямку базисних векторів — *осями координат*. Перша – вісь *абсцис*, друга – вісь *ординат,* третя – вісь *аплікат*. Площини, що проходять через осі координат, називають *координатними площинами.*

Будь-якій точці *M* простору можна співставити вектор $\overrightarrow{OM}$, початок якого збігається з початком координат *O*, а кінець – з точкою *M*. Такий вектор називають *радіусом - вектором* точки *M* відносно точки *O.*

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}.$$

Координати x_1, x_2, x_3 радіус-вектора точки *M* по відношенню до початку координат називають *координатами* точки *M* розглядуваній системі координат і пишуть: $M(x_1, x_2, x_3)$. Першу координату називають *абсцисою*, другу – *ординатою*, третю – *аплікатою*.

Базис називають *ортонормованим,* якщо його вектори одиничні і попарно перпендикулярні. Афінну систему координат, базис в якої ортонормований, називають *прямокутною декартовою системою координат* (ПДСК). В цьому випадку вектори базису називають *ортами* і позначають:

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \quad \partial e \, |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

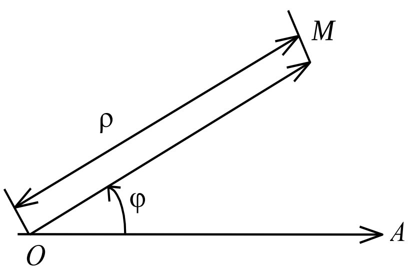


Рис. 2.5.

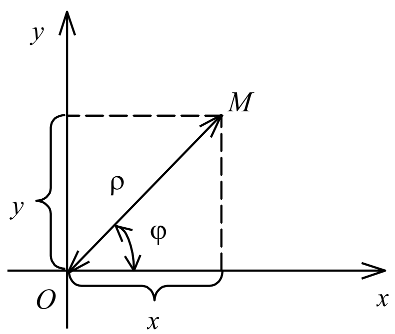


Рис. 2.6.

Полярний радіус ρ може змінюватись у межах $0 \le \rho < +\infty$, полярний кут – $0 \le \varphi < 2\pi$

.

Формули переходу від прямокутної до полярної системи координат (рис. 2.6):

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Приклад. Знайти полярні координати точки *M* (2, 2).

Розв'язання. Знайдемо полярний радіус:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}.$$

Оскільки точка *M* (2, 2) знаходиться у I координатному куті,то полярний кут гострий. Маємо

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{2}{2} = 1. \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

У полярних координатах точка *M* має координати $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Для орієнтації в просторі застосовують *циліндричні* та *сферичні* системи координат.

Залежність між прямокутними (*x, y, z*) і циліндричними (*ρ, φ, z*) координатами точки *M* у просторі виражаються формулами:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z \quad (0 \le \rho + \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \ -\infty < z < +\infty).$$

Прямокутні (*x, y, z*) і сферичні (*ρ, φ, θ*) координати точки *M* об'єднані формулами:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \ z = \rho\cos\theta,$$

$$(0 \le \rho \le +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \ 0 \le \theta \le 2\pi).$$

Запитання для самоперевірки

1. Яку сукупність називають афінною системою координат в просторі?
2. Як називаються осі координат
3. Що називається радіус-вектором точки в системі координат *Oxyz* ?
4. З чого складається полярна система координат?
5. Який базис називають ортонормованим?
6. Записати формули переходу від прямокутної до полярної системи координат.
7. Які системи координат використовують для орієнтації в просторі?

Навчальні завдання

8. Побудувати точки, полярні координати яких $A\left(4;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $B\left(3;\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $C\left(2;120^0\right)$, $D\left(5;3\dfrac{1}{7}\right)$, $E\left(4;-90^0\right)$; $F\left(2;-2\right)$.

9. Дано полярні координати точок $M_1\left(2;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(4;-90^0\right)$, $M_3\left(1,-\dfrac{2\pi}{3}\right)$,. $M_4\left(2;\,2\right)$, $M_5\left(5;-7\right)$. Знайти декартові координати точок. Побудувати отримані точки.

10. Побудувати відрізок *АВ*, якщо дано декартові координати точки *А* і полярні координати точки *В*:

а) А(2; 3) і В(4; $\dfrac{3\pi}{4}$); *б*) А(3; $-\pi$) і В(3; $-\pi$); *в*) А(0; 3) і В(2; $\dfrac{\pi}{3}$);

г) А(–4; –2) і В(1; 120°); *д*) А(5; –2) і В(5; –150°).

11. Полюс полярної системи координат збігається з початком декартових прямокутних координат, а полярна вісь збігається з додатною піввіссю абсцис. У декартовій прямокутній системі координат дано точки M_1 (0, 5), M_2 (-3, 0), $M_3\left(\sqrt{3};1\right)$.

§3. Вектори в системі координат.

Нехай у просторі задано деяку вісь *l* і вектор $\vec{AB}$. Проведемо через точки *А* і *В* площини, перпендикулярно до осі *l* (рис. 2.7). Позначимо точки перетину цих площин з віссю *l* відповідно A' і B'.

Проекцією вектора $\vec{AB}$ *на вісь l* називають довжину $A'B'$, де A' і B' проекції точок *А* і *В* на вісь *l*, взяту із знаком "+", якщо вектор $\vec{AB}$ співнапрямлений з віссю *l* та із знаком "–" у випадку коли вони протилежно напрямлені.

Позначають проекцію вектора $\vec{AB}$ на вісь *l* — $np_l\,\vec{AB}$.

Очевидно, що:

$$np_l\,\vec{AB} = \left|\vec{AB}\right|\cos\varphi,$$

де φ — кут між вектором і віссю.

Будь-який вектор можна розкласти за ортами координатних осей. Декартові прямокутні координати вектора дорівнюють алгебраїчним проекціям цього вектора на відповідні базисні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{a} = np_x\vec{a}\cdot\vec{i} + np_y\vec{a}\cdot\vec{j} + np_z\vec{a}\cdot\vec{k}.$$

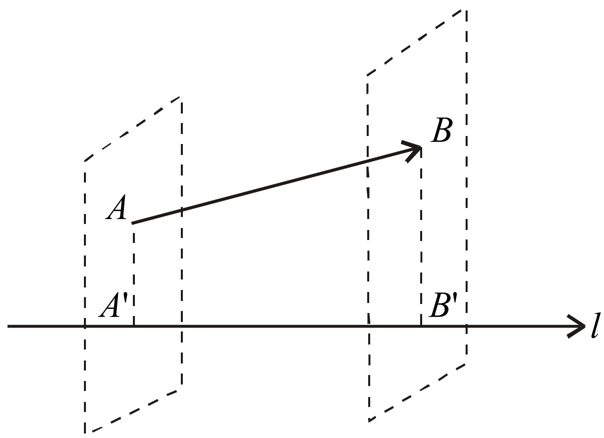


Рис. 2. 7

Якщо точка *A* (x_1, y_1, z_1) є початком вектора $\vec{a}$, а точка *B* (x_2, y_2, z_2) – його кінцем, то проекції вектора $\overrightarrow{AB}$ на кожну з осей мають вигляд:

$$Ox:\ a_x = x_2 - x_1,\quad Oy:\ a_y = y_2 - y_1,\quad Oz:\ a_z = z_2 - z_1.$$

Тоді

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}.$$

Іноді записують: $\vec{a}(a_x,\, a_y,\, a_z)$.

Довжина вектора визначається формулою:

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Нехай α, β, γ — кути між вектором $\vec{a}$ і відповідними осями системи координат, то його *напрямні косинуси* можна знайти за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Дії над векторами зводять до відповідних арифметичних дій над їхніми координатами:

1. $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z)$.
2. $\alpha\vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$.

Нехай задано дві точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$. Проведемо через ці точки пряму і візьмемо на ній довільну точку $C(x; y; z)$, яка ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda = \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|}$, тоді координати точки $C(x; y; z)$ можна обчислити за формулами:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \qquad z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \end{cases}$$

Якщо точка *C* ділить відрізок *AB* пополам, то λ =1 і маємо відомі формули середини відрізка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Приклад 1. Відрізок *AB* заданий координатами своїх кінців *A*(–3; 8; 2) і *B*(1; –2; 0). Знайти координати точки *C*, яка ділить його у відношенні *AC : CB* = $\frac{1}{3}$.

Розв'язання.. Знайдемо координати точки *C* за формулами:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}; \quad y_C = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda}; \quad z_C = \frac{z_A + \lambda \cdot z_B}{1+\lambda}.$$

Тоді $x_C = \dfrac{-3 + \frac{1}{3}\cdot 1}{1+\frac{1}{3}} = -2$; $\quad y_C = \dfrac{8 + \frac{1}{3}\cdot(-2)}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$; $\quad z_C = \dfrac{2 + \frac{1}{3}\cdot 0}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

Отримаємо: *C*(–2; 5,5; 1,5).

Якщо вектори $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x; b_y; b_я)$ і $\vec{c}(c_x; c_y; c_я)$ утворюють базис тривимірного простору то розклад будь-якого вектора $\vec{r}(r_x, r_y, r_я)$ за цим базисом в координатному вигляді буде:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_x + \lambda_2 в_x + \lambda_3 c_x = к_x, \\ \lambda_1 a_y + \lambda_2 в_y + \lambda_3 c_y = к_y, \\ \lambda_1 a_я + \lambda_2 в_я + \lambda_3 c_я = к_я. \end{cases}$$

Приклад 2. Вектори $\vec{a}(1;3;2)$, $\vec{b}(1;1;-1)$ і $\vec{c}(-1;-1;-1)$ утворюють базис тривимірного простору. Знайти координати вектора $\vec{r}(0,2,3)$ в цьому базисі.

Розв'язання.. *В*ектор $\vec{r}$ простору розкладемо за базисом $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$:

$$\vec{r} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{в} + \lambda_3 \cdot \vec{c}$$

$$(0,2,3) = \lambda_1 \cdot (1;3;2) + \lambda_2 \cdot (1;1;-1) + \lambda_3 \cdot (-1;-1;-1) = (\lambda_1;\, 3\lambda_1;\, 2\lambda_1) +$$
$$(\lambda_2;\, \lambda_2;\, -\lambda_2) + (-\lambda_3;\, -\lambda_3;\, -\lambda_3) = (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3;\; 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3;\, 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3).$$

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 2, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 3. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 3 + 2 + 3 - 1 = 8 - 4 = 4 \neq 0;$$

$$\Delta_{\lambda_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - 2 - 3 - 2) = 4;$$

$$\Delta_{\lambda_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 9 + 4 + 3 = -4; \qquad \Delta_{\lambda_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 - 9 + 2 = 0.$$

Підставимо знайдені визначники до формул Крамера і одержимо:

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_{\lambda_1}}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1; \qquad \lambda_2 = \frac{\Delta_{\lambda_2}}{\Delta} = \frac{-4}{4} = -1; \qquad \lambda_3 = \frac{\Delta_{\lambda_3}}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0.$$

Отже, розклад вектора $\vec{r}$ в базисі $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ має вигляд

$$\vec{r} = \vec{a} - \vec{в} + 0 \cdot \vec{c}$$

Координати вектора $\vec{r}$ в цьому базисі будуть $\vec{r}$ (1,–1, 0).

Запитання для самоперевірки

1. Що називають проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l?
2. Як розкладається вектор за ортами координатних осей?
3. Чому дорівнює довжина вектора в координатній формі?
4. За якими формулами можна знайти напрямні косинуси?
5. Як виконуються дії над векторами в координатній формі?
6. Записати формули поділу відрізка у заданому відношенні.
7. Як виконати розклад будь-якого вектора $\vec{r}(r_x, r_y, r_я)$ за базисом в координатному вигляді?

Навчальні завдання

12. Визначити відстань точки *А* (12, –3, 4) від початку координат і від осей координат.

13. Вектор утворює з двома осями системи координат кути, що рівні 60°. Під яким кутом він нахилений до третьої осі.

14. Обчислити довжину вектора $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ і кути, які він утворює з осями.

15. Дано координати точок A(-5; 0; 4), B(-3; -2; 5), C(-2; 0; 8). Знайти:

а) координати і модулі векторів $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$;

б) координати і довжину вектора $\vec{c} = 3 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{в}$.

16. Вектори $\vec{d}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ $\vec{d}_2 = 5\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ є діагоналями паралелограма. Знайти вектори, що задають його сторони.

17. Відрізок AB заданий координатами своїх кінців A і B. Знайти координати точки C, яка ділить його у відношенні AC : CB = λ.

а) A(3; -5; 4) і B(6; 2,5; 1), λ = 2; *б*) A(2; 0; 5) і B(-2; 8; 1), $\lambda = \frac{1}{3}$.

18. Відомо, що вектори $\vec{a}(5;3;1)$, $\vec{b}(-2;-1;2)$ і $\vec{c}(-2;1;4)$ утворюють базис тривимірного простору. Знайти координати вектора $\vec{r}(3;0;1)$ в цьому базисі.

19. Дано три вершини паралелограма *A*(–2; 3; 4), *B*(-1; -2; -4), *C*(-2; 5; -8). Знайти координати вершини *D*.

20. Знайти координати точки перетину медіан трикутника, в якому відомі координати вершин *A*(6; 0; –2), *B*(–8; 4; 2), *C*(0; 4; 6).

§4. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів називають добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Проекцію вектора на вектор можна обчислити за формулою:

$$пр_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

Властивості скалярного добутку

1) *Теорема.* Два ненульові вектори ортогональні (перпендикулярні) тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Доведення.

Необхідність. Нехай $\vec{a} \perp \vec{в}$, тоді $(\vec{a}, \vec{в}) = |\vec{a}||\vec{в}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$=$|\vec{a}||\vec{в}| \cdot 0 = 0$.

Достатність. Нехай $(\vec{a}, \vec{в})$=0, тоді $(\vec{a}, \vec{в}) = |\vec{a}||\vec{в}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$=0, звідси оскільки $|\vec{a}| \neq 0$ і $|\vec{в}| \neq 0$, то $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$=0, а це означає, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2$.

2) *Теорема.* Два ненульові вектори утворюють гострий кут, коли їх скалярний добуток буде додатнім числом. Два ненульові вектори утворюють тупий кут, коли їх скалярний добуток буде від′ємним числом.

Доведення.

Так як довжини векторів є величинами додатними, то знак скалярного добутку визначається знаком $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$. Відомо, що косинус гострого кута являється додатнім числом , а тупого – від′ємним.

3) $(\vec{a},\vec{в})=(\vec{в},\vec{a})$- комутативність.

4) $(\vec{a}+\vec{в})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{в}\cdot\vec{c}$ - дистрибутивність.

5) $(\lambda\cdot\vec{a},\vec{в})=\lambda\cdot(\vec{a},\vec{в})$

Якщо $\vec{a}\neq\vec{0}$, то $(\vec{a},\vec{a})$>0 і якщо $(\vec{a},\vec{a})$=0,то це означає, що $\vec{a}=\vec{0}$.

$(\vec{a},\vec{a})$=$|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\angle 0$ =$|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|$, або $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$ (скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини).

Нехай $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$. Тоді, використовуючи властивість 3 і 4, вираз скалярного добутку через координати буде мати вигляд:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів.

а) $\vec{a}(3;-2;8)$ і $\vec{b}(4;-5;3)$; б) $\vec{c}=-\vec{i}+9\vec{j}-7\vec{k}$ і $\vec{d}=2\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$.

Розв'язання. Скалярний добуток обчислимо за формулою

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4+(-2)\cdot(-5)+8\cdot3=12+10+24=46$.

б) $\vec{c}\cdot\vec{d}=c_x\cdot d_x+c_y\cdot d_y+c_z\cdot d_z$; $\vec{c}\cdot\vec{d}=(-1)\cdot2+9\cdot1+(-7)\cdot(-5)=-2+9+35=42$.

Умова перпендикулярності векторів. Два ненульові вектори ортогональні (перпендикулярні) тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$$

Застосування скалярного добутку

1) Кут між векторами визначається так:

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Приклад 2. Знайти з точністю до градусів кут *A* трикутника *ABC*, координати вершин якого A(–1; –4; 0), B(–2; –2; –2), C(–3; –3; 2).

Розв'язання. Знаходимо кут *A*, як кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.

$$\cos\angle A = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|};\ \overline{AB} = \left(-2-(-1);\ -2-(-4);\ -2-0\right) = (-1;\ 2;\ -2);$$

$$\overline{AC} = \left(-3-(-1);\ -3-(-4);\ 2-0\right) = (-2;\ 1;\ 2);$$

$$\cos\angle A = \frac{-1\cdot(-2)+2\cdot 1+(-2)\cdot 2}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}} = \frac{0}{3\cdot 3} = 0.$$ Отже, $\angle A = \arccos 0 = 90^\circ$.

Приклад 3. Дано вектори $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ і $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$. При якому значенні *m* ці вектори будуть перпендикулярні?

Розв′язання. Знайдемо скалярний добуток векторів: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4m + 3m - 28$. Оскільки $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, звідки $4m + 3m - 28 = 0 \Rightarrow 7m = 28 \Rightarrow m = 4$.

2) Проекцію вектора $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ на вектор $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ знайдемо за формулую

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|},$$ або

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

Приклад 4. Знайти проекцію вектора $\vec{b}(5;-7;3)$ на вектор $\vec{a}(2;-2;1)$.

Розв′язання. $$np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{5\cdot 2+(-7)\cdot(-2)+3\cdot 1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{27}{3} = 9.$$

Приклад 5. Обчислити $np_{\vec{a}+\vec{b}}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ і $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 120^0$.

Розв′язання. $$np_{\vec{a}+\vec{b}}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right) = \frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|}.$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right) = 2\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + 2\vec{a}\vec{b} - \vec{b}^2 = 2|\vec{a}|^2 + |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos 120^0 - \left|\vec{b}\right|^2 = 2 - \tfrac{1}{2} - 1 = \tfrac{1}{2}.$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{1 + 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 120^o + 1} = 1.$$

$$np_{\vec{a}+\vec{b}}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right) = \frac{1}{2}.$$

Приклад 6. Знайти кут між діагоналями паралелограма побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ і $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$ (рис. 2. 8).

Розв′язання. $\vec{a}(2;1;0)$ $\vec{b}(0;-2;1)$

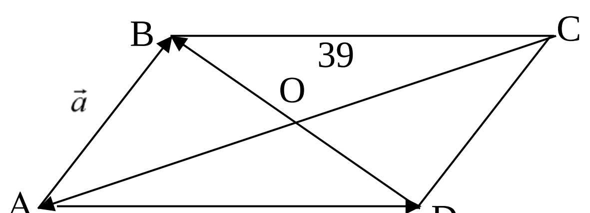


Рис. 2. 8

$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ $\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ $\overrightarrow{OB}(1;1{,}5;\,-0{,}5)$ і $\overrightarrow{OA}(-1;0{,}5;\,-0{,}5)$

$$\cos\angle O=\frac{-1+0{,}75+0{,}25}{\sqrt{1+2{,}25+0{,}25}\cdot\sqrt{1+0{,}25+0{,}25}}=0, \qquad \angle O=90^0.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називають скалярним добутком векторів?
2. Що називають проекцією вектора на вісь ?
3. Як знайти скалярний добуток через проекції?
4. Запишіть властивості скалярного добутку.
5. Виразіть скалярний добутк через координати.
6. Коли застосують скалярний добуток?

Навчальні завдання

21. Знайти скалярний добуток векторів

а) $\vec{a}(3;-4;7)$ і $\vec{b}(4;-5;-2)$; *б)* $d_1=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$ і $\vec{d}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$;

в) $\vec{a}(7;-5;-8)$ і $\vec{b}(-7;-8;4)$; *г)* $\vec{c}=-2\vec{i}-41\vec{j}+3\vec{k}$ і $\vec{d}=2\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$.

22. Відомо, що вектори $\vec{d_1}(2,-3,\alpha)$ і $\vec{d}_2(5;2;4)$ є діагоналями ромба. Знайдіть α .

23. Знайти кути трикутника АВС і кут між його медіанами, проведеними до сторін АВ і АС, якщо А(3; 0; 1), В(4; -5; 1) і С(2; -1; 5).

24. Дано два вектори $\vec{a}(4;-1;-2)$ і $\vec{b}(2;1;2)$. Знайти: *а)* $np_{\vec{a}}\vec{b}$; *б)* $np_{2\vec{a}-\vec{b}}\left(\vec{a}+5\vec{b}\right)$.

25. Знайти: а) $np_{\vec{a}}\vec{b}$; б) $np_{2\vec{a}-\vec{b}}\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)$, якщо $|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=3,\ \angle(\vec{a};\vec{b})=30^0$.

26. Відомо, що у ромбі ABCD $AB=5см$, а $\angle ABC=120^0$. Знайти скалярні добутки таких векторів: *а)* $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$; *б)* $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CB}$; *в)* $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$; *г)* $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

27. При якому значенні x кут між векторами $\vec{a}(4;-1)$ і $\vec{b}(x;12)$: *а)* гострий; *б)* тупий.

28. Вкажіть взаємне розміщення ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо

а) $\bar{a}\cdot\vec{b}=|\bar{a}|\cdot|\vec{b}|$; б) $\bar{a}\cdot\vec{b}=-|\bar{a}|\cdot|\vec{b}|$.

29. Знайдіть кут між векторами $\bar{a}$ і $\vec{b}$, якщо $(\bar{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=-11$, а $|\bar{a}|=2$, $\vec{b}=3$.

30. Знайти значення λ, при якому вектор $\vec{a}\perp\vec{b}$, якщо $\bar{a}$ (4; λ;-5), $\bar{b}$ (2λ;-3λ; λ).

§ 5. Векторний добуток векторів

Упорядковану трійку некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називають правою (рис.2.9, а), якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової; в протилежному випадку трійку векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називають лівою (рис.2.9, б).

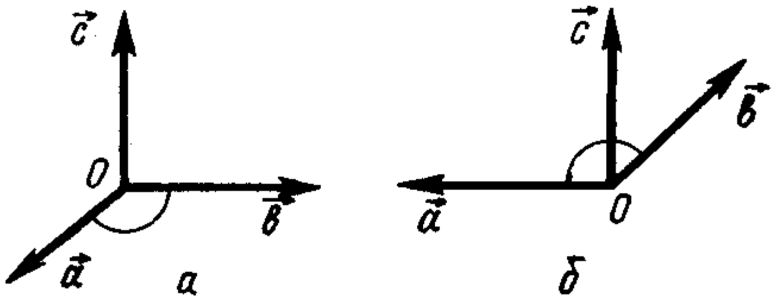


Рис. 2. 9

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови:

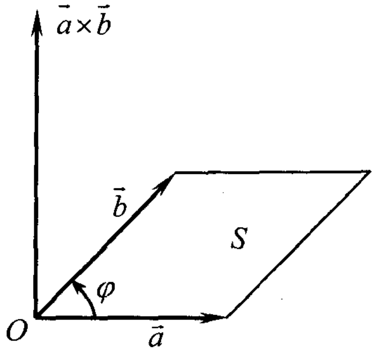


Рис. 2. 10

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\angle(\vec{a};\vec{b})$;

2) $\vec{c}\perp\vec{a}$ і $\vec{c}\perp\vec{b}$;

3) трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ права (рис.2.10).

Позначається

$\vec{c}=\left[\vec{a};\vec{b}\right]$ або $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

Властивості векторного добутку

1. Два ненульові вектори будуть колінеарними тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нулю.

2. Довжина векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах (рис.2.10).

$$\left|\left[\vec{a};\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{\mathrm{b}}|\cdot\sin\angle\left(\vec{a};\vec{\mathrm{b}}\right) = S_{пар}$$

Знаходження векторного добутку через координати

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Застосування векторного добутку

Приклад 1. Обчислити площу трикутника побудованого на векторах $\vec{a}(2;-3;4)$ $\vec{в}(1;-2;5)$.

Розв′язання. Модуль векторного добутку двох векторів дорвнює площі паралелограма побудованого на цих векторах, як на сторонах. Площа *S* даного трикутника дорівнює половині площі паралелограма. Отже знайдемо спочатку векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{в}$, а потім його модуль.

$$\left[\vec{a};\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}, \quad \left|\left[\vec{a};\vec{b}\right]\right| = \sqrt{49+36+1} = \sqrt{86},$$

$S_{пар.} = \sqrt{86}$, отже $S_{тр.} = \frac{1}{2}\sqrt{86}$.

Приклад 2. Довести, що вектори $\vec{a}(1;3;-4)$ і $\vec{b}(4;12;-16)$ колінеарні.

Розв′язання. Оскільки координати векторів

$\frac{4}{1} = \frac{12}{3} = \frac{-16}{-4}$ пропорційні, то вони колінеарні.

Приклад 3. За допомогою векторного добутку знайти синус кута між векторами $\vec{a}(1;2;2)$ $\vec{b}(2;3;1)$, а потім за допомогою скалярного добутку перевірити результат.

Розв′язання. Маємо:

$$\sin\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right) = \frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}.$$

При цьому $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=-4\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{16+9+1}=\sqrt{26}$; $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1+4+4}=3$; $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$.

$$\sin\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{14}}.$$

Використовуючи скалярний добуток знайдемо

$$\cos\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\frac{2+6+2}{3\sqrt{14}}=\frac{10}{3\sqrt{14}}$$

Якщо задача виконана вірно, оскільки знайдені значення косинуса і синуса задовольняють основну тригонометричну тотожність $cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$.

$\frac{26}{9\cdot 14}+\frac{100}{9\cdot 14}=\frac{126}{126}=1$, то задача розв'язана правильно.

§ 6. Мішаний добуток векторів

Два вектори множаться векторно: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{d}$, а отриманий вектор $\vec{d}$ скалярно множиться на вектор $\vec{c}$. Таке множення векторів називають *векторно-скалярним,* чи *мішаним добутком* трьох векторів, і позначається так:

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right).$$

Властивості мішаного добутку

1. $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\pm V$, де V- об′єм паралелепіпеда.

2. Три вектори будуть компланарними тоді і тільки тоді , коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Вираз змішаного добутку через координати

Нехай $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}(x_3;y_3;z_3)$.

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

Наслідок. Вектори будуть компланарними тоді і лише тоді, коли

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (умова компланарності).}$$

Приклад 4. Обчислити об′єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}(2;3;-1)$, $\vec{b}(4;5;1)$ і $\vec{c}(1;-2;3)$.

Розв′язання. Об′єм піраміди побудованої на даних векторах становить шосту частину об′єму паралелепіпеда, побудованого на цих же векторах.

$$V_{пір.} = \frac{1}{6} V_{пар.}.$$

Тому знайдемо спочатку змішаний добуток трьох даних векторів, модуль якого і дорівнює об′єму паралелепіпеда.

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 14 \;, \quad V_{пар.} = 14, \quad V_{пір.} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

Приклад 5. Перевірити, чи утворюють базис вектори $\vec{a}(4;3;-1)$, $\vec{b}(6;5;-2)$ і $\vec{c}(1;-2;-3)$.

Розв′язання. Три вектори утворюють базис, якщо вони не компланарні. Перевіримо, чи виконується умова компланарності:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -60-6+12+5+54-16 = -11 \neq 0.$$

Оскільки умова компланарності не виконується, то вектори утворюють базис.

Запитання для самоперевірки

1. Дати означення правої (лівої) трійки векторів.
2. Яку трійку векторів називають правою?
3. Що таке векторний добуток?
4. Який зв'язок між векторним добутком і площею паралелограма?
5. Для чого застосовують векторний добуток?
6. Сформулюйте властивості векторного добутку.
7. Як обчислити векторний добуток, знаючи координати векторів?
8. Що називають мішаним добутком?

9. Сформулюйте властивості мішаного добутку.

10. Для розв'язування яких задач зручно використовувати мішаний добуток?

Навчальні завдання

31. Дано вектори $d_1 = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ та $d_2 = 7\vec{i} + 2\vec{k}$. Знайти:

а) координати вектора, перпендикулярного до двох даних;

б) площу паралелограма, побудованого на $\vec{d}_1$ та $\vec{d}_2$.

32. Знайти площу трикутника ABC та довжину висоти CD, якщо відомі координати вершин трикутника A(2; 7; –5); B(0; –1; –3); C(3; 3; –5).

33. Дано три вектори $\vec{a} = \vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$; $\vec{c} = 4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

а) Знайти їх мішаний добуток.

б) Перевірити, чи компланарні вектори.

в) Яка орієнтація трійки векторів $\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c}$?

г) Знайти об'єм чотирикутного паралелепіпеда, заданого цими векторами.

д) Знайти об'єм трикутної призми, яка задана цими векторами.

е) Обчислити об'єм піраміди, побудованої на вказаних векторах.

є) Чи може вказана трійка векторів утворити базис тривимірного простору?

34. Дано дві вершини *A*(2; 0; 4), *B*(3; –1; 5) паралелограма *ABCD* і точка перетину його діагоналей *M*(4; 3,5; 3). Знайти координати інших вершин паралелограма та обчислити його площу.

35. Знайти координати вектора, перпендикулярного до площини трикутника *ABC,* де *A*(5; 8; –3); *B*(–2; 9; 3); *C*(0; –3; –4).

36. Знайти довжину однієї з висот паралелограма, діагоналями якого є вектори $\vec{d}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{d}_2 = 5\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$.

37. Показати, що чотирикутник *ABCD* – трапеція, якщо координати його вершин *A*(1; –2; –6), *B*(2; –4; 4), *C*(4; –4; 0), *D*(2; 0; –4). Знайти площу даної трапеції.

38. Чи буде плоскою фігура *ABCD*, якщо *A*(–6; 2; 4), *B*(3; 0; 9), *C*(5; 7; 1) і *D*(2; 0; -1)?

49. Знайти об'єм паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо відомі координати векторів $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$; $\overrightarrow{AA_1} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $\overrightarrow{AD} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

40. Знайти об'єм трикутної піраміди *SABC*, якщо відомі координати вершин *A*(-2; 2; 0), *B*(2; 0; –1), *C* (2; 1; -2), і точки *Q*(–1; 2; 1) – середини ребра *SB.*

41. Довести, що $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{b}$.

42. При якому значенні λ вектори $\vec{a}(1;2\lambda;1)$, $\vec{b}(1;\lambda;0)$, $\vec{c}(0;\lambda;1)$ будуть компланарними?

43. Відомо, що $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = \dfrac{2\pi}{3}$. Обчислити $\left|(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})\right|$.

44. Задано вектори $\vec{a}(3;-1;2)$ і $\vec{b}(1;2;-1)$. Знайти координати вектора $(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+3\vec{b})$.

45. Перевірити компланарність векторів $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j}$; $\vec{c} = 5\vec{j} + 3\vec{k}$.

46. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$.

47. Знайти об'єм трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ із основами ABC і $A_1B_1C_1$, координати вершин якої $A(3; -2; 1)$, $B_1(1; -1; 4)$, $C_1(-2; 1; 5)$, $A_1(2; 1; 5)$.

48. Перевірити, чи лежать точки $A(2;3;6)$, $B(0;0;4)$, $C(1;-2;-3)$, $D(2;4;6)$ в одній площині.

Розділ 3
ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

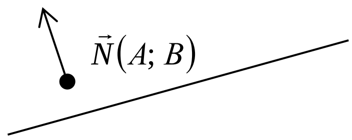
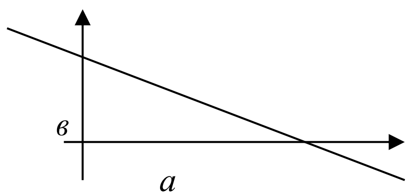
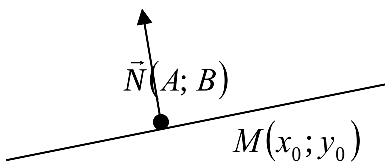
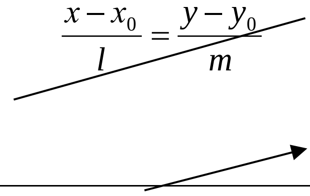
§ 1. Пряма на площині

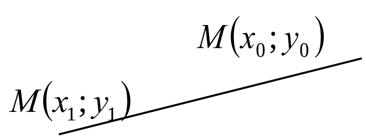
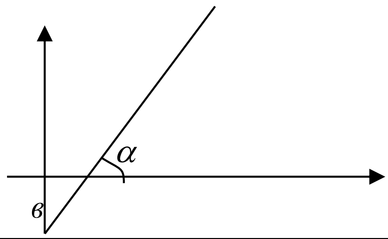
1.1. *Поняття про пряму та її рівняння*

Рівняння $F(x,y)=0$ називають *рівнянням деякої лінії в заданій системі координат*, якщо цьому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки, що лежить на цій лінії і не задовольняють координати точки, яка не лежить на цій лінії.

1. Нехай на площині π визначена деяка фіксована система координат *xOy.* Відносно цієї системи координат рівняння будь-якої прямої, що лежить на площині π є лінійним рівнянням з двома змінними.

2. Нехай на площині π визначена деяка фіксована система координат *xOy.* Відносно цієї системи координат лінійне рівняння визначає пряму.

Вид рівняння прямої	***Геометрична інтерпретація умови***	***Рівняння***
Загальне рівняння		$Ax+By+C=0$
“ у відрізках на осях”.		$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$
що проходить через дану точку перпендикулярно даному вектору.		$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$
канонічне	$M(x_0;y_0)$ $\vec{q}(l;\,m)$	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$ 

що проходить через дві точки		$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$
з кутовим коефіцієнтом		$y=k\cdot x+в$, $k=tg\alpha$

Приклад 1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки А(-3; 5) і В(7; -2).

Розв'язання. Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки зайдемо рівняння прямої *АВ:*

$\frac{x-(-3)}{7-(-3)}=\frac{y-5}{-2-5}$, $\frac{x+3}{10}=\frac{y-5}{-7}$, звідси маємо $7x+10y-29=0$.

Приклад 2. Знайти рівняння сторін трикутника АВС, якщо дано рівняння його висот $x+y-2=0$ і $9x-3y-4=0$ і координати вершини $A(2;2)$.

Розв'язання. Оскільки координати точки А не задовольняють рівнянь даних висот, то ці висоти не проходять через вершину А.

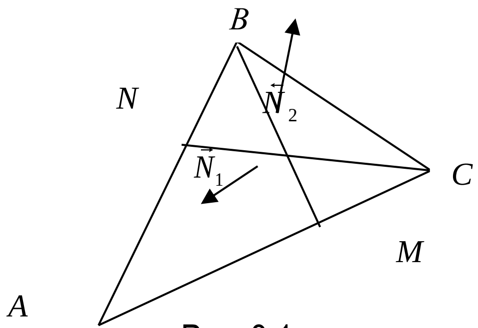


Рис. 3.1

Нехай рівняння висоти BM : $x+y-2=0$, CN : $9x-3y-4=0$. Тоді вектори $\overrightarrow{N_1}(1{,}1)$, $\overrightarrow{N_2}(9,-3)$, будуть паралельними відповідно до прямих *АС* та *АВ*. Скористаємося канонічним рівнянням прямої. Отримаємо:

АС: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}$, АВ: $\frac{x-2}{9}=\frac{y-2}{-3}$,

або в загальному вигляді

$$x-y=0 \qquad і \qquad x+3y-8=0.$$

Знайдемо координати точок *В* і *С.* Для цього розв'яжемо системи рівнянь :

$$\begin{cases} x+3y-8=0, \\ x+y-2=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=3. \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=0, \\ 9x-3y-4=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}, \\ y=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Отже, для знаходження рівняння сторони *BC* скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві точки. Отримаємо:

$$\frac{x-\frac{2}{3}}{-1-\frac{2}{3}}=\frac{y-\frac{2}{3}}{3-\frac{2}{3}} \quad \text{або} \quad 7x+5y-8=0.$$

Приклад 3. Задані координати вершин *A*(2; 2), *B*(5; 8), *C*(7; 1) трикутника *ABC*. Знайти величину кута *B.*

Розв'язання. Величину кута В знаходимо за формулою $tg\beta=\dfrac{\kappa_2-\kappa_1}{1+\kappa_1\cdot\kappa_2}$

Обчислимо кутові коефіцієнти сторін:

$$\kappa_1=\kappa_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{8-2}{5-2}=\frac{6}{3}=2, \quad \kappa_2=\kappa_{BC}=\frac{1-8}{7-5}=-\frac{7}{2}=-3{,}5.$$

$tg\angle B=\dfrac{-3{,}5-2}{1+(-3{,}5)\cdot 2}$. Звідси $\angle B=arctg0{,}916$, $\angle B=42°21'$.

1.2. Кут між прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Прямі, задані рівняннями	*Кут між прямими*	*Умова*	
		Паралель-ності	*Перпенди-кулярності*
p_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$ p_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$	$\cos\angle(p_1;p_2)=\pm\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$	$A_1A_2=B_1B_2$
p_1: $\dfrac{x-x_0}{l_1}=\dfrac{y-y_0}{m_1}$; p_2: $\dfrac{x-x_0}{l_2}=\dfrac{y-y_0}{m_2}$.	$\cos\angle(p_1;p_2)=\pm\dfrac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$	$\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}$	$l_1l_2=m_1m_2$
p_1: $y=k_1x+b_1$; p_2: $y=k_2x+b_2$.	$tg\angle(p_1;p_2)=\pm\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$	$k_1=k_2$	$k_1k_2=-1$

Приклад 4. Знайти рівняння прямої, яка паралельна прямій 2x+3y–1=0 і відтинає на додатній піввісі абсцис відрізок довжиною 4 одиниці.

Розв'язання. Шукана пряма проходить через точку А(4; 0), а її кутовий коефіцієнт дорівнює кутовому коефіцієнту даної прямої

$$3y = 1 - 2x\,,\;\; y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x\,,$$

тобто $\kappa = -\frac{2}{3}$. Використаємо рівняння прямої, яка проходить через дану точку в заданому напрямку

$$y - y_A = \kappa(x - x_A),\;\; y - 0 = -\frac{2}{3}(x-4), \text{ або } 2x+3y-8=0.$$

Якщо пряма *l* задана загальним рівнянням *Ax+By+C=0* , то відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ до цієї прямої визначається за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Приклад 5. Знайти довжину висоти AD трикутника ABC, якщо відомо координати вершини A(2; 2) та рівняння сторони BC: 7x+2y–51=0.

Розв'язання. Довжину висоти AD знайдемо як відстань від точки A(2; 2) до прямої BC за формулою (). У нашому випадку A=7; B=2; C=51, і тоді $d = \frac{|7\cdot 2 + 2\cdot 2 - 51|}{\sqrt{7^2+2^2}} = \frac{|-33|}{\sqrt{53}} = \frac{33}{\sqrt{53}}$. Отже, $AD = \frac{33}{\sqrt{53}}$.

Запитання для самоперевірки

1. Що називають рівнянням лінії?
2. Записати загальне рівняння прямої.
3. Записати рівняння прямої у відрізках на осях.
4. Записати рівняння прямої, що проходить через точку, перпендикулярно вектору.
5. Записати канонічне рівняння прямої.
6. Записати рівняння прямої, що проходить через дві дані точки.
7. Як знайти кут між прямими?
8. Сформулювати умову паралельності прямих.
9. Сформулювати умову перпендикулярності прямих.
10. Як знайти відстань від точки до прямої?

Навчальні завдання

1. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;-3)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}(2;-3)$. Звести це рівняння до загального вигляду. Подати це рівняння « у відрізках на осях», з кутовим коефіцієнтом, у нормальному вигляді.

2. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(-1;4)$ паралельно до прямої

а) $2x-3y+5=0$; *б*) $\frac{x-4}{2}=\frac{y+5}{7}$; *в*) $y=-2x+12$.

3. Дано точки $A(5;-3)$ $B(-1;4)$. Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через ці дві точки?

4. Дано координати вершин трикутника $A(0;-3)$ $B(6;5)$ $C(2;-1)$.

а) записати рівняння сторони ВС;

б) записати рівняння висот AD та СК;

в) знайти довжину висоти AD.

5. Записати рівняння прямої, яка утворює з віссю OX кут $\beta=30^0$ і проходить через точку $A(1;-1)$.

6. Серед поданих прямих знайти пари паралельних і перпендикулярних $a:2x-3y+6=0$; $b:5x+7y-16=0$; $c:-4x+6y+1=0$; $d:-3x+2y=0$ $m:15x+21y+14=0$; $k:6x-4y+1=0$. Який кут утворюють прямі b і d?

7. Обчислити відстань від точки $P(1;-2)$ до прямої $m:4x-3y+7=0$.

8. Знайти відстань між прямими $p:-3x+5y=0$ і $s:6x-10y-4=0$.

9. Написати рівняння геометричного місця точок, віддалених від прямої $d:4x+3y-4=0$ на відстань 3 одиниці.

10. Написати рівняння прямої, яка містить точку $A(2;-3)$ і відтинає на осях відрізки однакової довжини.

11. Яким є взаємне розміщення прямих $m:x+4y-8=0$ $d:\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{-3}$. Якщо прямі перетинаються, обчислити кут між ними.

12. Сторони АВ і ВС паралелограма задані рівняннями $2x-y+6=0$ $x+4y-7=0$, діагоналі його перетинаються в точці $O(2;-3)$. Знайти довжини його висот.

§ 2. Площина у просторі

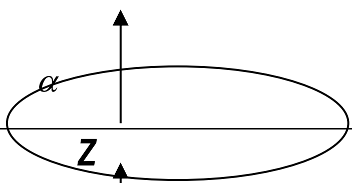
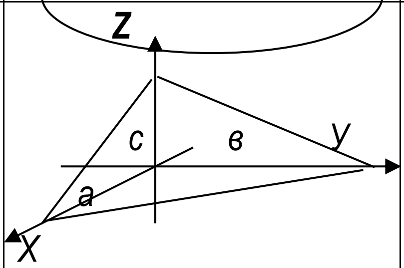
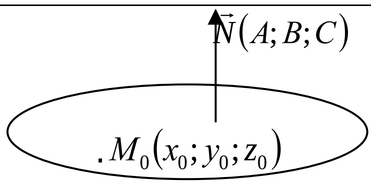
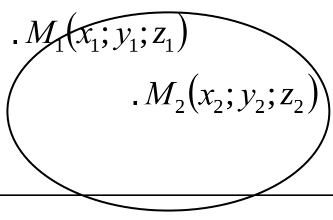
2.1. Рівняння площини

Рівняння виду *Ax+By+Cz+D=0*, де *A,B,C,D* –сталі, причому *A,B,C* одночасно не дорівнюють 0, називають лінійним рівнянням трьома змінними, або рівнянням першої степені.

Мають місце два твердження:

1. Нехай задана площина π і визначена деяка фіксована система координат *OXYZ.* Відносно цієї системи координат рівняння будь-якої площини є лінійним рівнянням з трьома змінними.

2. Нехай визначена деяка фіксована система координат *OXYZ.* Відносно цієї системи координат лінійне рівняння визначає площину.

Вид рівняння площини	Геометрична інтерпретація умови	Рівняння	Номер формули
загальне		$Ax+By+Cz+D=0$	(2.1)
у відрізках на осях		$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1$	(2.2)
що проходить через дану точку перпендикулярно даному вектору.		$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-$	(2.3)
що проходить через три дані точки.		$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_1 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$	(2.4)

Якщо площина задана загальним рівнянням *Ax+By+Cz+D=0*, то відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ визначається за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Приклад 1. Зведемо загальне рівняння площини *2x+3y+z-6=0* до рівняння у відрізках на осях .

Розв'язання. Для цього поділимо обидві його частини на 6: $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1$.

Отже, площина перетинає осі координат у точках $x = 3$, $y = 2$, $z=6$.

Приклад 2. Запишемо рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(2, 3,4)$, $M_3(4, 3, 1)$.

Розв'язання. Рівняння (2.4) набирає вигляду:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & 3-1 & 4-1 \\ 4-1 & 3-1 & 1-1 \end{vmatrix}=0$$

Розкривши визначник, дістанемо рівняння: *6x–9y+ 4z–1=0.*

Приклад 3. Дано координати точок A(-2; -1; -2), B(3; 0; -2), C(1; 4; 2). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку C перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$ = (3 + 2; 0 + 1; –2 + 2) = (5; 1; 0),

Рівняння площини, яка проходить через задану точку M (x_0,y_0,z_0) перпендикулярно вектору $\vec{N}$ = (A, B, C), має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

В нашому випадку $\vec{N}$ = $\overrightarrow{AB}$ = (5; 1; 0), M = C (1; 4; 2). Тоді рівняння шуканої площини матиме вигляд $5(x – 1) + (y – 4) + 0(z – 2) = 0$; $5x + y – 9 = 0$.

2.2. Взаємне розміщення двох площин

Нехай дано дві площини, які визначаються загальними рівняннями

$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z+ D_1 = 0,$

$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Кут між площинами можна знайти за такою формулою:

$$\cos\angle(\pi_1;\pi_2)=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Умова перпендикулярності площин: $\pi_1 \perp \pi_2$ коли $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Умова паралельності площин: $\pi_1 \parallel \pi_2$ коли $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Приклад 4. Записати рівняння площини, яка проходить через точки $A(3; -1; 4)$ і $B(3; 2; -1)$ перпендикулярно площині $x + y + 2z - 3 = 0$.

Розв'язання. Вектор $\overrightarrow{N_1}(1; 1; 2)$, перпендикулярний до заданої площини. Оскільки вектори $\overrightarrow{N_1}(1; 1; 2)$ і $\overrightarrow{AB}(1; 3; -5)$ паралельні шуканій площині, то їх векторний добуток буде перпендикулярним до шуканої площини. Отже, в якості нормального вектора $\vec{N}$ візьмемо $\overline{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{N_1}$. Тому

$$\overline{N} = \left\{ \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\} \text{ або } \overline{N}(11; -7; -2).$$

Скористаємося рівнянням площини, що проходить через точку А(2; –1; 4) перпендикулярно до вектора $\overline{N}(11; -7; -2)$.

11(x – 2) – 7(y + 1) – 2(z – 4) = 0 або 11x – 7y – 2z – 21 = 0.

Приклад 4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку *M* (-4; 3; -7) та паралельна до площини $6x-5y+4z-15=0$.

Розв'язання. Оскільки шукана площина паралельна площині

$$6x-5y+4z-15=0,$$

то в якості її нормального вектора візьмемо вектор - нормаль $\overline{N}(6; -5; 4)$ даної площини.

Тепер шукане рівняння площини, яка проходить через точку М (-4; 3; -7) та перпендикулярна даному вектору $\vec{N}$ має вигляд

$$6(x+4)-5(y-3)+4(z+7)=0, \text{ або } 6x-5y+4z+67=0.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається лінійним рівнянням з трьома змінними?
2. Записати загальне рівняння площини.
3. Який вигляд має рівняння площини, якщо площина паралельна до осі *Ox*? *Oy*? *Oz*?
4. Який вигляд має рівняння площини, якщо площина перпендикулярна до осі *Ox*? *Oy*? *Oz*?
5. Який вигляд має рівняння площини, якщо площина проходить через вісь *Ox*? *Oy*? *Oz*?

6. Який вигляд має рівняння площини, якщо площина проходить через осі *Ox* і *Oy*? *Oy* і *Oz*? *Ox* і *Oz*?
7. Записати рівняння площини у відрізках на осях.
8. Записати рівняння площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно до вектора.
9. Записати рівняння площини, що проходить через три дані точки.
10. Як знати відстань від точки до площини?
11. Як знати кут між площинами?
12. Сформулювати умову паралельності площин.
13. Сформулювати умову перпендикулярності площин.

Навчальні завдання

13. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки *A, B, C.* Визначити відстань від початку координат до цієї площини.

а) *A*(7; -2; 5), *B*(4; 3; 0), *C*(6; -2; 1); *б*) *A*(3; 7; 0), *B*(1; -5; 2), *C*(3; 4; -1);

в) *A*(7; -2; 1), *B*(3; -2; 1), *C*(1; 8; -3); *г*) *A*(7; -2; 3), *B*(4; 1; 0), *C*(3; -2; 5).

14. Дано дві точки $M(1;-4;-5)$ і $N(-4;0;3)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку *M*, перпендикулярно до вектора $\vec{N} = M\vec{P}$.

15. Зайти рівняння площини, яка проходить через точку $A(1;-3;7)$, паралельно до площини $\alpha : 5x - 2y + z + 15 = 0$.

16. Знайти кут між площинами.

а) $\alpha ; 2x + 3y - 5z = 0$ і $\beta : 4x + y = 0$ *б*) $\alpha : x + 4y - 3z + 7 = 0$ і $\beta : -x + 3y + 2z - 2 = 0$.

17. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;-2;0)$, перпендикулярно до площин $\alpha : 2x + 5y - z + 10 = 0$ і $\beta : -7x + 4y - 17 = 0$.

18. Знайти рівняння площин, паралельних площині $\rho : 2x + 5y - 6z + 9 = 0$ і віддалених від неї на 2 одиниці.

19. Із точки $P(4;-8;1)$ на координатні площини опущено перпендикуляри. Скласти рівняння площини, яка проходить через їх основи.

20. Зайти рівняння площини, яка проходить через точки $P(5;-4;0)$ і $A(-2;-1;8)$ паралельно до осі *Oz.*

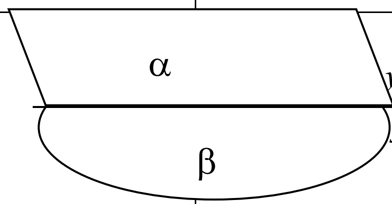
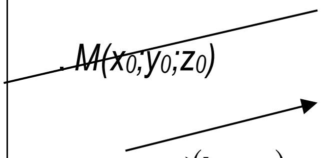
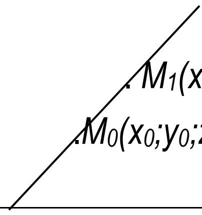
21. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $P(1;-2;-3)$ і вісь *Oy.*

22. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(3;-5;-1)$ і відтинає на осях *Ox* і *Oy* відрізки *а=4* і *в=3.*

23. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-2;0;-3)$ і відтинає на осях *Ox* і *Oy* відрізки вдвічі менші, ніж на осі *Oz.*

§ 3. Пряма у просторі

3.1. Рівняння прямої

Вид рівняння прямої	Геометрична інтерпретація умови	**Рівняння**
загальне	*p*  α β	$y + C_1 z + D_1 = 0$ $y + C_2 z + D_2 = 0$
канонічне	 . *M(x0;y0;z0)* $\vec{q}(l;m;n)$	$\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$
що проходить через дві точки	 . *M1(x1;y1;z1)* .*M0(x0;y0;z0)*	$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} = \dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$

Приклад 1. Записати канонічне рівняння прямої, заданої своїм загальним рівнянням:

$$\begin{cases} x + y + 2z + 4 = 0, \\ x - y - 2z - 6 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Візьмемо $z_0 = 0$, та із системи рівнянь знайдемо $x_0 = 1$, $y_0 = -5$. Вектор

$$\vec{q} = \left[\vec{N}_1, \vec{N}_2\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} - \vec{k} + 2\vec{j} + 2\vec{i} = 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

Канонічне рівняння прямої набере вигляду :

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+5}{4} = \frac{z}{-2}.$$

3.2. Кут між прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих.

Нехай прямі p_1 і p_2 задані своїми канонічними рівняннями.

p_1: $\dfrac{x-x_0}{l_1} = \dfrac{y-y_0}{m_1} = \dfrac{z-z_0}{n_1}$;

p_2: $\frac{x-x_0}{l_2}=\frac{y-y_0}{m_2}=\frac{z-z_0}{n_2}$.

Тоді вектори $\vec{q}_1(l_1;m_1;n_1)$ і $\vec{q}_2(l_2;m_2;n_2)$ будуть напрямними векторами до цих прямих, тобто ці вектори відповідно паралельні до вказаних прямих. Отже кут між прямими можна розглядати, як кут між векторами (рис. 3.2), тому

$$\cos\angle(p_1;\,p_2)=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

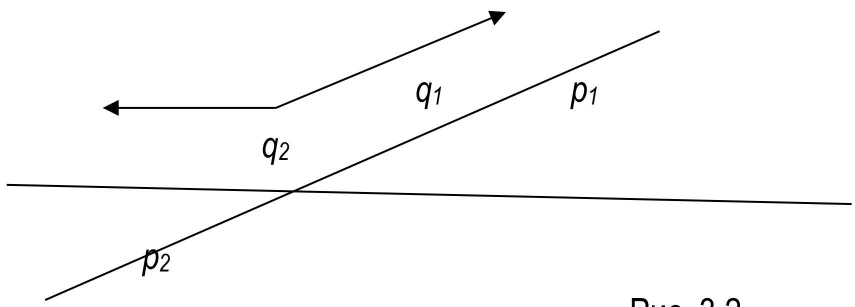


Рис. 3.2

Умова перпендикулярності прямих: $p_1 \perp p_2$ коли $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

Умова паралельності прямих: $p_1 // p_2$ коли $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$.

3.3. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності прямої і площини.

Нехай площина π задана своїм загальним рівнянням, а пряма *l*–канонічним (рис. 3.3).

П: $Ax+By+Cz+D=0$

l: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k}$.

Вектор $\vec{N}$ *(A;B;C)* буде перпендикулярним до площини π, а вектор $\vec{s}$ *(l;m;n)* - паралельним до прямої *l.*

Оскільки $\theta+\varphi=90^o$, то

$$\sin\theta=\cos\varphi=\frac{Am+Bn+Ck}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+k^2}}$$

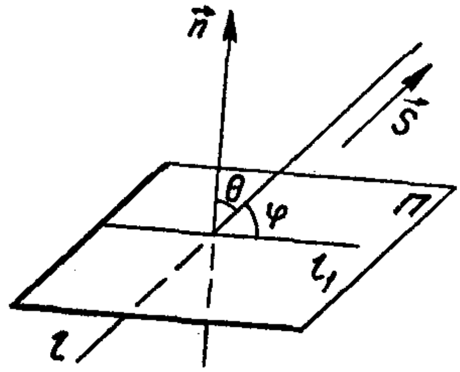


Рис. 3.3

Умова паралельності прямої і площини: $Am+Bn+Ck=0$.

Умова перпендикулярності прямої і площини: $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{k}$.

Приклад 2. Загальне рівняння прямої

$$\begin{cases} x-2y+3z+15=0, \\ 2x+3y-4z-12=0 \end{cases}$$

привести до канонічного виду.

Розв'язання. Знайдемо направляючий вектор $\vec{s}=(l;\, m;\, n)$ прямої. Оскільки він перпендикулярний до нормальних векторів даних площин $\overline{N}_1(1;-2;3)$ і $\overline{N_2}(2;3;-4)$, знайдемо його за допомогою векторного добутку векторів $\overline{N}_1$ і $\overline{N}_2$:

$$\vec{s}=\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-\vec{i}+10\vec{j}+7\vec{k}.$$

Таким чином, $l=-1, \quad m=10, \quad n=7$.

Шукана пряма проходить через довільну точку $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ координати якої задовольняють загальне рівняння прямої. Нехай $x_0=0$ маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2y_0-3z_0=15, \\ 3y_0-4z_0=12 \end{cases}$$

отримаємо $y_0=-24, \quad z_0=-21$. Шукане канонічне рівняння прямої має вигляд

$$\frac{x}{-1}=\frac{y+24}{10}=\frac{z+21}{7}.$$

Приклад 3. Знайти точку перетину прямої

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

з площиною $3x-2y+z-3=0$.

Розв'язання. Перейдемо від канонічного рівняння прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}=t$ до параметричного: $x=-1+2t$, $y=2+t$, $z=1-t$. Підставимо значення *x*, *y*, *z* в рівняння площини, отримаємо

$$3(-1+2t)-2(2+t)+(1-t)-3=0,\ t=3.$$

Підставимо отримане значення t в параметричне рівняння прямої та знайдемо координати точки перетину: *x=5*, *y=5*, *z=-2*.

Приклад 4 . Знайти кут між прямою $\begin{cases} x=9+t, \\ y=5-2t, \\ z=-1-t; \end{cases}$ та площиною $4x-2y+2z+7=0$

.**Розв'язання.** Запишемо рівняння даної прямої у вигляді $\frac{x-9}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+1}{-1}$. Отже, при *A=4, B= –2, C=2,* $l=1,\quad m=-2,\quad n=-1$.

$$\sin\varphi=\frac{|4\cdot1-2\cdot(-2)+2\cdot(-1)|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}.$$

Отже, $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

Приклад 5. При якому значені *m* пряма $x=2-7t$, $y=-3+mt$, $z=4-15t$ паралельна до площини $6x-9y+5z-11=0$?

Розв'язання. Застосуємо умову паралельності прямої та площини. Підставимо у формулу (6.6) відповідні значення, отримаємо рівняння

$$-7\cdot6+m\cdot(-9)-15\cdot5=0, \text{ або } 9m+117=0,\ m=-13.$$

Приклад 6. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-4;3;-8)$ та перпендикулярна прямій

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{7}.$$

Розв'язання. За нормальний вектор $\overline{N}$ шуканої площини можна прийняти паралельний йому направляючий вектор $\vec{s}=(2;-5;7)$ даної прямої. Використаємо формулу $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ рівняння площини, яка проходить через дану точку $M(-4;3;-8)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}$, маємо

$$2(x+4)-5(y-3)+7(z+8)=0, \text{ або } 2x-5y+7z+79=0.$$

Запитання для самоперевірки

1. Записати загальне рівняння прямої у просторі.
2. Записати канонічне рівняння прямої у просторі.
3. Записати рівняння прямої, що проходить через дві точки.
4. Як знати кут між прямими у просторі?
5. Сформулювати умову паралельності і перпендикулярності прямих.
6. Як знати кут між прямою і площиною?
7. Сформулювати умову паралельності і перпендикулярності прямої та площини.

Навчальні завдання

24. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1;2;-3)$ перпендикулярно площині $\alpha : x-2y+2z-5=0$.

25. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку А паралельно даній прямій.

а) А (1; 2; –2), $\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$; *б*) А (1; 0; 1), $\begin{cases} 2x-2y+z+4=0 \\ x+2y-3z-1=0 \end{cases}$.

26. Визначити кут, які утворює пряма $x+3y-7z+13=0$ з площиною $\begin{cases} x-2y+z+4=0 \\ 2x-y-z-2=0 \end{cases}$.

27. Перевірте, чи лежить пряма $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$ у площині $\rho : 2x-y-2z-9=0$

.

28. Зайти рівняння площини, яка проходить через точку $A(1;-3;7)$, паралельно до площини $\alpha : 5x-2y+z+15=0$.

29. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{5}$ з площиною $4x-2y+6z+7=0$.

§ 4. Криві другого порядку

Розглянемо тепер лінії другого порядку, які на площині в загальному випадку можна записати так:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

4.1. *Еліпс.*

Множину точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок (*фокусів)*, є величина стала й така, що дорівнює 2*a* і більша, ніж відстань між фокусами, називають *еліпсом*.

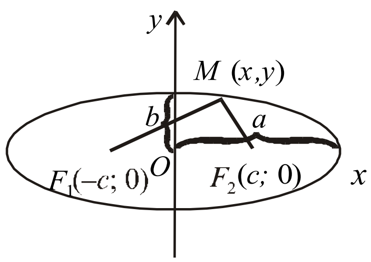


Рис. .3.4

На рис.3.4 *F* (–*c*,0), F_2 (*c*, 0) — фокуси еліпса,

M (*x*, *y*) — точка множини, яка задовольняє означення, тобто

$|MF_1| + |MF_2| = 2a,$ причому 2*c* < < 2*a* $\Rightarrow$ *a* > *c*.

Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в канонічне рівняння. Якщо *x* = 0, *y* = $\pm$ *b*, тобто точки (0, *b*) і (0, – *b*) є точками перетину еліпса з віссю *Oy.* Відрізок завдовжки *b* називають *малою піввіссю* еліпса.

При *y*=0, *x* = $\pm$*a* і відповідно (*a*,0); (– *a*; 0) є точками перетину еліпса з віссю *Ox*. Відрізок завдовжки *a* — *велика піввісь* еліпса.

Ексцентриситет еліпса — це відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$; за означенням *c* < *a* і $\varepsilon \in [0, 1)$.

Оскільки $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$, то $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. З останньої рівності випливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує *ступінь витягнутості* еліпса. Так, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі *Ox*.

4.2. Гіпербола..

Множину точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок (*фокусів)*, є величиною сталою, яка дорівнює 2*a* і менша за відстань між фокусами, називають *гіперболою*.

На рис. 3.5 точки F_1 $(-c, 0)$ і F_2 $(c, 0)$ — фокуси гіперболи, точка M (x, y) — точка визначеної множини. Тоді

$$\left\| MF_1 \right| - \left| MF_2 \right\| = 2a, a < c \,.$$

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{де} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь Oy. При $y = 0$; $x = \pm a$ і точки $(-a, 0)$; $(a, 0)$ — точки перетину з віссю Ox. Розглянемо ще рівняння прямих $y = \pm \frac{b}{a} x$, які далі називатимемо *асимптотами гіперболи*.

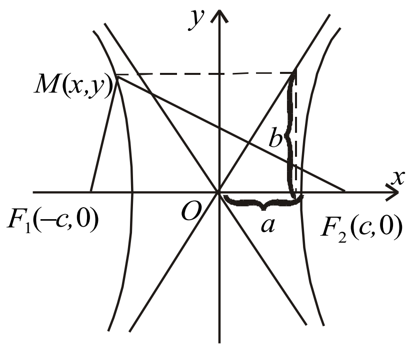


Рис. 3.5

Враховуючи симетрію відносно осей Ox і Oy, будуємо графік гіперболи, який зображено на рис. 3.5.

Відрізки завдовжки b і a називають відповідно *уявною* і *дійсною осями гіперболи*.

Ексцентриситет гіперболи

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \text{ але } c > a \text{ і } \varepsilon > 1.$$

Вважаючи, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2, \qquad \text{або } \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,.$$

Для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі Ox.

Дві прямі, рівняння яких $x = -\frac{a}{\varepsilon}$; $x = \frac{a}{\varepsilon}$, називаються *директрисами* еліпса і гіперболи. Для еліпса $0 \le \varepsilon < 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} > a$, директриси еліпса — це дві прямі, що розміщені симетрично відносно осі Oy і проходять зовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі Oy і лежать між вітками гіперболи.

Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе *твердження*:

якщо r — відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а d — відстань від цієї самої точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ стале й дорівнює ексцентриситету, тобто $\varepsilon = \frac{r}{d}$.

Для еліпса $\varepsilon<1$, а для гіперболи, якщо $\varepsilon > 1$.

4.3. Парабола

Множину точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої (*директриси)*, яка не проходить через фокус називають *параболою* (рис.3.6).

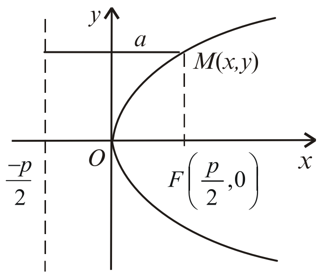


Рис. 3.6

За означенням $r = d$.

Отже,

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} = x+\frac{p}{2},$$ або $y^2 = 2px$ — канонічне рівняння параболи, якщо $\varepsilon = 1$.

4.5. Коло

Множину точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки (*центра*), називають *колом* (рис.3.7).

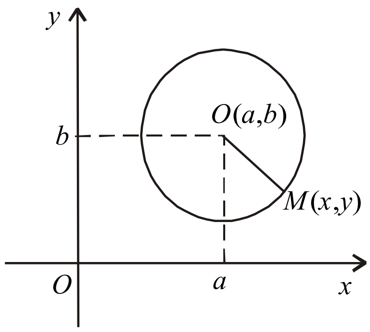


Рис. 3.7

За означенням

$$OM = R$$

або

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо канонічне рівняння кола:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус.

Приклад 1. Знайти осі, вершини, фокуси та ексцентриситет еліпса

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Розв'язання. Порівнявши отримане рівняння з рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, маємо $a=5$, $b=3$. Віс і еліпса: $2a=10$, $2b=6$ і координати вершин $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$, $B_1(0;-3)$, $B_2(0;-3)$. Далі знайдемо $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$. Отже, фокусами є точки $F_1(-4;0)$ та $F_2(4;0)$. Ексцентриситет еліпса обчислюємо за формулою:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0{,}8.$$

Приклад 2. Знайти осі, вершини, фокуси, ексцентриситет та рівняння асимптот гіперболи

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Розв'язання. Порівнявши отримане рівняння з рівнянням $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, маємо $a=3$, $b=4$. Таким чином, дійсна вісь гіперболи $2a=6$, а уявна вісь $2b=8$, координати вершин $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$. Далі знайдемо $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5$. Отже, фокусами є точки $F_1(-5;0)$ та $F_2(5;0)$. Ексцентриситет еліпса обчислюємо за формулою: $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$. Підставимо значення $a=3$, $b=4$ у рівняння $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, отримаємо рівняння асимптот гіперболи: $y=\pm\frac{4}{3}x$.

Приклад 3. Знайти координати центра та радіус кола заданого загальним рівнянням

$$9x^2+9y^2+36x-18y+20=0.$$

Розв'язання. Приведемо дане рівняння до вигляду $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Для цього поділимо всі його члени на 9, а потім згрупуємо окремо члени, які містять x і y:

$$\left(x^2+4x\right)+\left(y^2-2y\right)+\frac{20}{9}=0.$$

Доповнимо вирази, які знаходяться у кожній з дужок, до повного квадрату:

$$\left(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2-4\right)+\left(y^2-2\cdot y\cdot 1+1^2-1\right)+\frac{20}{9}=0,$$

$$(x+2)^2-4+(y-1)^2-1+\frac{20}{9}=0,\ (x+2)^2+(y-1)^2-\frac{25}{9}=0,$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2.$$

Порівнюючи це рівняння з канонічним рівнянням $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, дане коло має координати центра $(-2;\ 1)$ і радіус $r=\frac{5}{3}$.

Приклад 4. Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої відношення відстаней до точки $A(3;0)$ і до прямої $x=12$ дорівнює 0,5. Отримане рівняння привести до найпростішого вигляду і побудувати криву.

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка шуканого геометричного місця точок. Опустимо перпендикуляр МВ на пряму $x=12$ (рис.3.8). Тоді точка В матиме координати $B(12;y)$.

За умовою задачі $\frac{|MA|}{|MB|}=\frac{1}{2}$. Використаємо формулу для знаходження відстані між двома точками. Отримаємо

$$|MA|=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}\ ,\quad |MB|=\sqrt{(x-12)^2+(y-y)^2}\ .$$

Тоді $$\frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\sqrt{(x-12)^2}}=\frac{1}{2}.$$

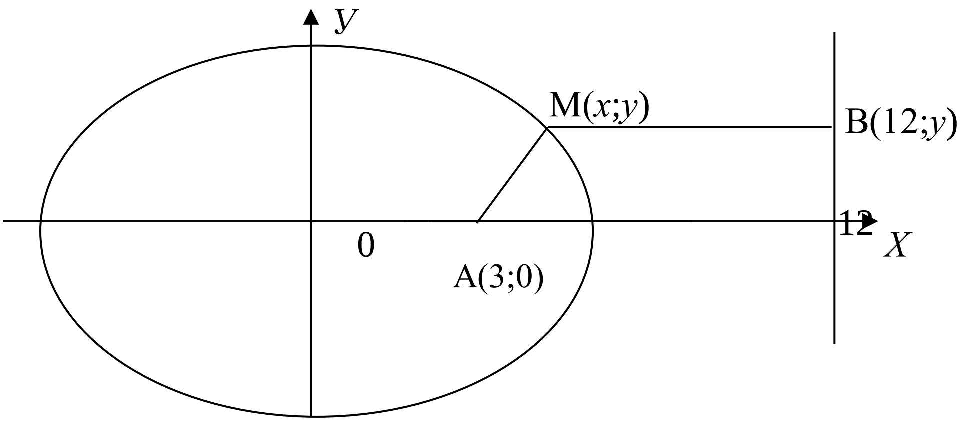


Рис. 3.8

Піднесемо отримане рівняння до квадрату. Отримаємо:

$$\frac{x^2-6x+9+y^2}{x^2-24x+144}=\frac{1}{4},$$

$$4x^2-24x+36+4y^2=x^2-24x+144,\ \ 3x^2+4y^2=108,$$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$$

Отримане рівняння є рівнянням еліпса вигляду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де $a=6$, $b=3\sqrt{3}$. Оскільки для еліпса $b^2=a^2-c^2$, то $c^2=a^2-b^2=9$. Тому фокусами будуть точки $F_1(-3;0)$ і $F_2(3;0)$, а ексцентриситет еліпса $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Приклад 5. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат і фокусом в точці $F(0;\ -8)$.

Розв'язання. Фокус параболи лежить на вісі ординат, а вершина – у початку координат, тому рівняння параболи можна записати у вигляді $x^2=2py$, або

$x^2=-2py$. Оскільки ордината фокуса від'ємна, то шукане рівняння параболи буде у вигляді $x^2=-2py$. Фокусна відстань параболи $OF=\frac{p}{2}=8$, то $2p=32$. Отже, отримаємо рівняння параболи: $x^2=-32y$.

Запитання для самоперевірки

1. Що називають еліпсом?
2. Записати канонічне рівняння еліпса.
3. Як називають параметри *a* і *b* у рівнянні еліпса?
4. Як знайти координати фокусів еліпса?
5. Що називають директрисою еліпса? Записати їх рівняння.
6. Що таке ексцентриситет еліпса, його числове значення?
7. Що називають гіперболою?
8. Записати канонічне рівняння гіперболи.
9. Як називають параметри *a* і *b* у рівнянні гіперболи?
10. Як знайти координати фокусів гіперболи?
11. Що називають директрисою гіперболи? Записати їх рівняння.
12. Що таке ексцентриситет гіперболи, його числове значення?
13. Що називають параболою?
14. Записати канонічне рівняння параболи.
15. Як знайти координати фокуса параболи?
16. Директриса параболи, її рівняння.
17. Що таке ексцентриситет параболи, його числове значення?

Навчальні завдання

30. Встановити назву кривої та побудувати її графік.

а) $x^2 + y^2 - 4x - 16y - 13 = 0$; *б)* $x^2 + y^2 + 4x - 32 = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 4y - 45 = 0$; *г)* $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 40 = 0$.

31. Записати рівняння даної кривої у канонічному вигляді, встановити назву кривої, побудувати її графік, на якому показати фокуси і директриси.

а) $49x^2 + 16y^2 = 784$; *б)* $9x^2 - 16y^2 = 144$; *в)* $4x^2 - 49y^2 = -196$;

г) $25x^2 + y^2 = 25$; *д)* $x^2 = -6y$; *е)* $y^2 = 8x$.

32. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо дійсна піввісь дорівнює $2\sqrt{5}$, а ексцентриситет – $\sqrt{1{,}2}$. Зробити рисунок.

33. Знайти рівняння еліпса, якщо його велика піввісь дорівнює 10, а ексцентриситет – 0,8. Зробити рисунок.

34. Записати рівняння гіперболи, асимптоти якої y=±4x, а директриси x=±6.

35. Написати рівняння гіперболи, віддалі між фокусами якої дорівнюють 16, а між директрисами 8. Знайти кут її між асимптотами. Зробити рисунок.

36. Еліпс проходить через точки $M\left(\sqrt{3}; -2\right)$ і $N\left(-2\sqrt{3}; 1\right)$. Скласти його канонічне рівняння.

37. Знайти відстань від фокуса гіперболи $x^2 - 4y^2 = 16$ до її асимптот. Зробити рисунок.

38. Написати рівняння дотичних до гіперболи $x^2 - 4y^2 = 16$, які проходять через точку A(0; -2). Зробити рисунок.

39. Знайти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки

$M_0(4; 2)$ і прямої $2 - x = 0$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.

Індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів по модулю "Елементи лінійної та векторної алгебри. Аналітична геометрія"

1. Розв’язати систему рівнянь за правилом Крамера:

1) а) $\begin{cases} 2x+3y+z=1, \\ x+y-4z=0, \\ 4x+5y-3z=1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1+10x_2+x_3=-7, \\ 3x_1+x_2-2x_3=-2, \end{cases}$

2) а) $\begin{cases} x+y-3z=0, \\ 3x+2y+2z=-1, \\ x-y+5z=-2, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=1, \\ 3x_1-x_2+3x_3=-1, \\ 5x_1+2x_2+6x_3=1, \end{cases}$

3) а) $\begin{cases} 3x-3y+2z=-4, \\ 2x+y-3z=-1, \\ x-2y+5z=1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1-x_2-3x_3=2, \\ 4x_1+3x_2-x_3=3, \\ -2x_1+4x_2+3x_3=1, \end{cases}$

4) а) $\begin{cases} 4x-y+3z=1, \\ 3x+2y+4z=8, \\ 2x-2y+4z=0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x_1+4x_2+x_3=1, \\ 3x_1+5x_2+6x_3=2, \\ x_1+2x_3=-1, \end{cases}$

5) а) $\begin{cases} 3x-3y+2z=-4, \\ 2x+y-3z=-1, \\ x-2y+5z=1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=2, \\ x_1+x_2+3x_3=-7, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=5, \end{cases}$

6) а) $\begin{cases} 3x-y+4z=-3, \\ x+2y+2z=3, \\ 5x+3y+2z=9, \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1-3x_2-6x_3=2, \\ 3x_1-7x_2-5x_3=1, \\ -10x_1+11x_2=1, \end{cases}$

7) а) $\begin{cases} x+2y-3z=1, \\ 2x-3y-z=-7, \\ 4x+y-2z=0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1+4x_2+x_3=3, \\ -x_1-6x_2-2x_3=1, \\ 7x_1+8x_2+3x_3=5, \end{cases}$

8) а) $\begin{cases} 2x+4y-3z=2, \\ x+y+2z=0, \\ 3x-2y+z=-5, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3=1, \\ 2x_1-x_2-x_3=1, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=6, \end{cases}$

9) а) $\begin{cases} x-4y+2z=4, \\ 4x+y-3z=5, \\ 2x+3y+4z=8, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1+3x_2+8x_3=2, \\ -4x_1+11x_2+5x_3=2, \\ -x_1+x_2+4x_3=-4, \end{cases}$

10) а) $\begin{cases} 3x-2y-z=-5, \\ x+3y+2z=2, \\ 5x-2y+4z=-7, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=5, \\ -2x_1+7x_2+5x_3=-7, \\ 3x_1-6x_2-7x_3=-5, \end{cases}$

11) а) $\begin{cases} 2x+3y+z=1, \\ x+y-4z=0, \\ 4x+5y-3z=1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3=-1, \\ 3x_1+x_2-2x_3=1, \\ 5x_1-2x_2+3x_3=8, \end{cases}$

12) а) $\begin{cases} x+y-3z=0, \\ 3x+2y+2z=-1, \\ x-y+5z=-2, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3=4, \\ x_1-3x_2-2x_3=1, \\ 5x_1-3x_2+5x_3=2, \end{cases}$

13) а) $\begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ x-2y-5z=-9, \\ 4x+3y-2z=4, \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x_1+4x_2+4x_3=2, \\ 3x_1+x_2-2x_3=-2, \\ x_1+4x_3=9, \end{cases}$

14) а) $\begin{cases} 4x-y+3z=1, \\ 3x+2y+4z=8, \\ 2x-2y+4z=0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+6x_3=-1, \\ 7x_1+x_2+7x_3=1, \\ -2x_1+x_2-3x_3=2, \end{cases}$

15) а) $\begin{cases} 3x-3y+2z=7, \\ 2x+y-2z=-5, \\ x-2y+5z=12, \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3x_1-2x_2+x_3=1, \\ 6x_1+7x_2-x_3=-3, \\ 5x_1+4x_2+4x_3=9, \end{cases}$

16) а) $\begin{cases} 3x-y+4z=2, \\ x+2y+3z=7, \\ 3x+3y+2z=8, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+5x_3=8, \\ 2x_1+3x_2+7x_3=9, \\ -4x_1+5x_2+3x_3=-1, \end{cases}$

17) а) $\begin{cases} x+2y-3z=1, \\ 2x-3y-z=-7, \\ 4x+y-2z=0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x_1+6x_2+13x_3=1, \\ 9x_1-4x_2+4x_3=1, \\ 7x_1-5x_2+3x_3=-1, \end{cases}$

18) а) $\begin{cases} 2x+4y-3z=2, \\ x+y+2z=0, \\ 3x-2y+z=-5, \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3=3, \\ -x_1-x_2+x_3=2, \\ 5x_1-x_2+2x_3=2, \end{cases}$

19) а) $\begin{cases} x-4y+2z=-5, \\ 4x+y-3z=-3, \\ 2x+3y+4z=1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0, \\ 4x_1+2x_2+3x_3=3, \\ 5x_1-2x_2+5x_3=-2, \end{cases}$

20) а) $\begin{cases} 3x-2y-z=-5, \\ x+3y+2z=2, \\ 5x-2y+4z=-7, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-7, \\ 4x_1-5x_2+x_3=11, \\ 3x_1+3x_2-x_3=-2, \end{cases}$

21) а) $\begin{cases} 2x+3y+z=1, \\ x+y-4z=0, \\ 4x+5y-3z=1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+x_2-4x_3=-6, \\ 2x_1+4x_2+x_3=0, \\ 4x_1-x_2+3x_3=11, \end{cases}$

22) а) $\begin{cases} x+y-3z=0, \\ 3x+2y+2z=-1, \\ x-y+5z=-2, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+4x_2+x_3=5, \\ -15x_1+6x_2-7x_3=-2, \\ x_1+2x_3=-1, \end{cases}$

23) а) $\begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ x-2y-5z=-9, \\ 4x+3y-2z=4, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+4x_2=-2, \\ 3x_1-x_2+x_3=6, \\ -x_1+x_2+4x_3=6, \end{cases}$

24) а) $\begin{cases} 4x-y+3z=1, \\ 3x+2y+4z=8, \\ 2x-2y+4z=0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=3, \\ 4x_1-x_2-2x_3=2, \\ 7x_1+4x_2-5x_3=2, \end{cases}$

25) а) $\begin{cases} 3x-3y+2z=-4, \\ 2x+y-3z=-1, \\ x-2y+5z=1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=1, \\ 3x_1-x_2+3x_3=-1, \\ 5x_1+2x_2+6x_3=1, \end{cases}$

26) а) $\begin{cases} 3x-y+4z=2, \\ x+2y+3z=7, \\ 5x+3y+2z=8, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1+10x_2+x_3=-7, \\ 3x_1+x_2-2x_3=-2, \end{cases}$

27) а) $\begin{cases} 3x-y+4z=2, \\ x+2y+3z=7, \\ 5x+3y+2z=8, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=3, \\ 4x_1-x_2-2x_3=2, \\ 7x_1+4x_2-5x_3=2, \end{cases}$

28) а) $\begin{cases} 2x+4y-3z=2, \\ x+y+2z=0, \\ 3x-2y+z=-5, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-7, \\ 4x_1-5x_2+x_3=11, \\ 3x_1+3x_2-x_3=-2, \end{cases}$

29) а) $\begin{cases} x-4y+2z=-5, \\ 4x+y-3z=-3, \\ 2x+3y+4z=1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3=3, \\ -x_1-x_2+x_3=2, \\ 5x_1-x_2+2x_3=2, \end{cases}$

30) а) $\begin{cases} 3x-2y-z=-5, \\ x+3y+2z=2, \\ 5x-2y+4z=-7, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x_1+6x_2+13x_3=1, \\ 9x_1-4x_2+4x_3=1, \\ 7x_1-5x_2+3x_3=-1. \end{cases}$

2. Виконайте побудову.

1) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{q}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{r} = 2\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ і $\vec{p} = -1{,}5\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + 2\vec{s}$.

2) Задайте довільні вектори $\vec{p}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{q}, \vec{r}$. Побудуйте вектори $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} - 2\vec{c} + \vec{p}$ і $\vec{s} = 2\vec{q} - \frac{1}{3}\vec{r} - \vec{p}$.

3) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{r}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$ і $\vec{q} = \vec{r} + 1{,}5\vec{s} - 2\vec{c}$.

4) Задайте довільні вектори $\vec{p}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{q}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{r} = \vec{b} + 2\vec{c} - \vec{p}$ і $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{q} - 2\vec{s} + \vec{b}$.

5) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}, \vec{q}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{r}$ і $\vec{c} = 2\vec{r} - \frac{3}{2}\vec{q} + \frac{1}{2}\vec{s}$.

6) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{p}$ і $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{p} + 2\vec{q} - \vec{s}$.

7) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{q}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{p} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - 2\vec{c}$ і $\vec{r} = 2\vec{q} - \vec{c} + \vec{s}$.

8) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{q}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ і $\vec{r} = \vec{q} + \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{s}$.

9) Задайте довільні вектори $\vec{p}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{q}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c} - \vec{p}$ і $\vec{r} = 2\vec{q} - \vec{c} + 2\vec{s}$.

10) Задайте довільні вектори $\vec{s}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{q}, \vec{r}$. Побудуйте вектори $\vec{a}=\vec{b}+2\vec{c}-\frac{3}{2}\vec{r}$ і $\vec{p}=2\vec{q}-\vec{r}+\frac{1}{2}\vec{s}$.

11) Задайте довільні вектори $\vec{p}, \vec{b}, \vec{s}, \vec{q}, \vec{r}$. Побудуйте вектори $\vec{c}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{r}-2\vec{p}$ і $\vec{a}=2\vec{q}-\vec{r}+\frac{3}{2}\vec{s}$.

12) Задайте довільні вектори $\vec{p}, \vec{s}, \vec{c}, \vec{q}, \vec{r}$. Побудуйте вектори $\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{p}+2\vec{q}$ і $\vec{b}=2\vec{q}+\frac{3}{2}\vec{r}-\vec{s}$.

13) Задайте довільні вектори $\vec{p}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{q}, \vec{r}$. Побудуйте вектори $\vec{a}=\vec{b}+2\vec{c}-\frac{3}{2}\vec{p}$ і $\vec{s}=2\vec{q}-\frac{1}{2}\vec{r}+\vec{p}$.

14) Задайте довільні вектори $\vec{p}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{s}, \vec{r}$. Побудуйте вектори $\vec{a}=\vec{b}-2\vec{c}+\frac{3}{2}\vec{p}$ і $\vec{q}=2\vec{r}-\frac{1}{2}\vec{s}-\vec{b}$.

15) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{r}, \vec{p}$. Побудуйте вектори $\vec{q}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-2\vec{c}$ і $\vec{s}=\frac{3}{2}\vec{p}-2\vec{r}+\vec{b}$.

16) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{r}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$ і $\vec{p}=\vec{b}-2\vec{r}-\frac{2}{3}\vec{s}$.

17) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{q}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{p}$ і $\vec{c}=\vec{q}-2\vec{p}+\frac{3}{2}\vec{s}$.

18) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{q}=2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{p}$ і $\vec{r}=\frac{4}{3}\vec{b}-2\vec{s}-\vec{c}$.

19) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{r}, \vec{c}, \vec{p}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{b}=\vec{a}+2\vec{c}-\frac{5}{3}\vec{p}$ і $\vec{q}=2\vec{r}+\frac{1}{3}\vec{p}-\vec{s}$.

20) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{p}, \vec{r}, \vec{q}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{b}=\frac{1}{4}\vec{r}-2\vec{p}+\vec{q}$ і $\vec{c}=1,5\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{r}+\vec{s}$.

21) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{r}, \vec{c}, \vec{q}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{b}=\vec{a}-1,5\vec{c}+\vec{r}$ і $\vec{p}=2\vec{q}+\frac{2}{3}\vec{r}+\frac{1}{4}\vec{s}$.

22) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{r}, \vec{c}, \vec{q}, \vec{p}$. Побудуйте вектори $\vec{b}=\vec{a}+1,5\vec{p}-\frac{1}{4}\vec{r}$ і $\vec{s}=\frac{1}{2}\vec{q}-\vec{r}+2\vec{c}$.

23) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{p}, \vec{c}, \vec{r}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{q}=2\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{r}+\vec{c}$ і $\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{p}+2\vec{r}-\vec{s}$.

24) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{q}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{d}=\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ і $\vec{p}=1,5\vec{q}+\frac{3}{2}\vec{b}+2\vec{s}$.

25) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}, \vec{q}, \vec{p}$. Побудуйте вектори $\vec{c}=2\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}-1,5\vec{p}$ і $\vec{s}=\vec{q}+\vec{r}+1,5\vec{a}$.

26) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{q}, \vec{r}$. Побудуйте вектори $\vec{p}=\vec{b}-2\vec{r}+\frac{3}{2}\vec{c}$ і $\vec{s}=\frac{1}{4}\vec{q}+1,5\vec{r}-\vec{a}$.

27) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}, \vec{r}$. Побудуйте вектори $\vec{s}=2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$ і $\vec{q}=\vec{c}+2\vec{p}-\frac{3}{4}\vec{r}$.

28) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{q}, \vec{r}$. Побудуйте вектори $\vec{s}=1,5\vec{c}+2\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{p}=0,5\vec{q}-0,25\vec{r}+\vec{b}$.

29) Задайте довільні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}, \vec{s}$. Побудуйте вектори $\vec{r}=\frac{1}{4}\vec{b}-2\vec{c}+0,75\vec{p}$ і $\vec{q}=2\vec{a}+\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{s}$.

30) Задайте довільні вектори $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{b}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$. Побудуйте вектори $\frac{1}{2}\vec{a} - 0{,}25\vec{b} + \vec{p}$ і $\vec{q} = -\vec{p} + 2\vec{r} + 0{,}5\vec{s}$.

3. Знайти з точністю до градусів кути трикутника ABC і кут між його медіанами, проведеними до сторін AB і AC.

1) A(3; 0; 1), B(4; -5; 1),C(2; -1; 5);
2) A(5; -3; 2), B(-8; 4; 1), C(7; 6; -2);
3) A(4; -6; 2), B(0; 7; -1), C(3; 8; 5);
4) A(1; 3; -5), B(0; 4; 0), C(-8; 3; 6);
5) A(3; 0; 2), B(4; -5; 1), C(2; -1; 5);
6) A(7; 3; -1), B(-3; 1; 2), C(4; -2; 5);
7) A(3; 0; 7), B(4; 6; -1), C(2; -3; 5);
8) A(3; 0; -2), B(1; 2; 4), C(5; 0; 6);
9) A(2; 0; 1), B(3; 4; -5), C(-1; 6; 2);
10) A(4; 2; -1), B(3; 6; 3), C(-2; 0; 5);
11) A(5; 3; -2), B(6; 4; 0), C(-3; 0; 2);
12) A(2; -3; -1), B(-4; 6; 2), C(0; -2; 5);
13) A(4; -2; 3), B(0; 6; 8), C(2; 1; 5);
14) A(2; -5; 7), B(5; 4; -3), C(-1; 0; 5);
15) A(3; 4; 8), B(-2; 0; -1), C(4; 5; 9);
16) A(5; 3; 8), B(2; 0; 4), C(3; 6; 9);
17) A(5; 2; -4), B(3; -3; 0), C(2; -4; 8);
18) A(3; 1; 8), B(2; 0; 5),C(3; 6; 7);
19) A(3; 6; -2), B(4; 5; -7), C(6; -5; -3);
20) A(7; 3; -1), B(-3; 1; 2), C(4; -2; 5);
21) A(3; 6; -9), B(5; 4; -2), C(0; -6; -4);
22) A(-3; 8; 9), B(4; 8; 5), C(6; -7; -9);
23) A(3; -8; 1),B(3; 5; 0),C(-2; 5; 1);
24) A(5; -3; 2),B(-8; 4; 1),C(7; 6; -2);
25) A(3; 1; 1), B(3; 2; 0) , C(-2; 6; 4);
26) A(4; 0; -2), B(1; -3; 0), C(2; -2; 7);
27) A(6; -8; 4), B(5; 0; -3), C(1; 4; 2);
28) A(8; 4; -6), B(3; -1; 0), C(7; 5; -2);
29) A(5; -3; 2), B(4; 6; 0), C(7; -4; 1);
30) A(6; -8; 4), B(5; 0; -3), C(1; 4; 2).

4. Дано вектори $\vec{d}_1$ та $\vec{d}_2$.Знайти: *а*) координати вектора, перпендикулярного до двох даних; *б*) площу паралелограма, побудованого на $\vec{d}_1$ та $\vec{d}_2$.

1) $d_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$; $d_2 = 5\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$;
2) $d_1 = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$; $d_2 = \vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$;
3) $d_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$; $d_2 = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$;
4) $d_1 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$; $d_2 = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$;
5) $d_1 = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$; $d_2 = 5\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$;
6) $d_1 = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$; $d_2 = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$;
7) $d_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$; $d_2 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$;
8) $d_1 = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$; $d_2 = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$;
9) $d_1 = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$; $d_2 = 4\vec{i} - 9\vec{j} + 6\vec{k}$;
10) $d_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$; $d_2 = \vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$;
11) $d_1 = 7\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$; $d_2 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$;
12) $d_1 = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $d_2 = 8\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k}$;
13) $d_1 = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$; $d_2 = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$;
14) $d_1 = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$; $d_2 = 5\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$;
15) $d_1 = 7\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$; $d_2 = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$;
16) $d_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}$; $d_2 = 7\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$;
17) $d_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$; $d_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$;
18) $d_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$; $d_2 = 5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$;

19) $d_1 = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$; $d_2 = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$;

20) $d_1 = 8\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$; $d_2 = 9\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$;.

21) $d_1 = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $d_2 = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$;

22) $d_1 = 5\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $d_2 = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$;

23) $d_1 = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $d_2 = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{k}$;

24) $d_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$; $d_2 = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$;

25) $d_1 = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$; $d_2 = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 8\vec{k}$;

26) $d_1 = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$; $d_2 = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$;

27) $d_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$; $d_2 = 5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$;

28) $d_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$; $d_2 = 2\vec{i} - 7\vec{j} + 3\vec{k}$;

29) $d_1 = 9\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}$; $d_2 = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}$;

30) $d_1 = 5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$; $d_2 = \vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$.

5. Перевірити, чи компланарні вектори.

1) $\vec{a} = 8\vec{i} + 6\vec{j} - 10\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}$;
$\vec{c} = 8\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$;

2) $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{b} = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$;
$\vec{c} = 8\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$;

3) $\vec{a} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$;
$\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$;

4) $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{b} = 7\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$;
$\vec{c} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}$;

5) $\vec{a} = 5\vec{i} + 10\vec{j} - 6\vec{k}$; $\vec{b} = -5\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$;
$\vec{c} = 10\vec{i} + 4\vec{j} - 9\vec{k}$;

6) $\vec{a} = 11\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 10\vec{k}$;
$\vec{c} = 7\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$;

7) $\vec{a} = 10\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$;
$\vec{c} = 7\vec{i} - 8\vec{j} - \vec{k}$;

8) $\vec{a} = 11\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$;
$\vec{c} = 7\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$;

9) $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$;
$\vec{c} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$;

10) $\vec{a} = 10\vec{i} + 10\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$;
$\vec{c} = 6\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$;

11) $\vec{a} = 11\vec{i} - \vec{j} + 10\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$;
$\vec{c} = 8\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$;

12) $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$;
$\vec{c} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$;

13) $\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$;
$\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$;

14) $\vec{a} = 8\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}$; $\vec{b} = 10\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}$;
$\vec{c} = -2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$;

15) $\vec{a} = 5\vec{i} + 10\vec{j} - 6\vec{k}$; $\vec{b} = -5\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$;
$\vec{c} = 10\vec{i} + 4\vec{j} - 9\vec{k}$;

16) $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$;
$\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$;

17) $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{b} = 7\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$;
$\vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 5\vec{k}$;

18) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{b} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$;
$\vec{c} = 4\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$;

19) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 10\vec{j} - 6\vec{k}$;
$\vec{c} = -\vec{i} - 2 + 13\vec{j} - 5\vec{k}$;

20) $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$; $\vec{b} = 5\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$;
$\vec{c} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$;

21) $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 7\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$;

22) $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}$;

$\vec{c} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$;

$\vec{c} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$;

23) $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{b} = 7\vec{i} + 2\vec{j} - 9\vec{k}$; $\vec{c} = 8\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$;

24) $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 8\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$; $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k}$;

25) $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{c} = 8\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$;

26) $\vec{a} = 8\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{b} = 10\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$; $\vec{c} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$;

27) $\vec{a} = 9\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{c} = 4\vec{i} - 2 + 7\vec{j} + 3\vec{k}$;

28) $\vec{a} = 4\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$; $\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$;

29) $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{b} = 5\vec{i} + 9\vec{j} - 9\vec{k}$; $\vec{c} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$;

30) $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{b} = 7\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{c} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}$.

6. Дано координати вершин трикутника:

а) записати рівняння сторони ВС;

б) записати рівняння висот *AD* та *CK*;

в) знайти довжину висоти *AD*.

1) A(– 3; 0), B(9; 9), C(7; – 5);
2) A(– 9; – 2), B(3; 7), C(1; – 7);
3) A(– 5; 2), B(7; – 7), C(5; 7);
4) A(– 7; 5), B(5; – 4), C(3; 10);
5) A(– 7; 1), B(5; – 8), C(3; 6);
6) A(0; 3), B(12; – 6), C(10; 8);
7) A(– 8; 4), B(4; – 5), C(2; 9);
8) A(– 2; 2), B(10; – 7), C(8; 7);
9) A(1; 2), B(13; – 7), C(11; 7);
10) A(– 4; 1), B(8; – 8), C(6; 6);
11) A(– 7; 1), B(– 5; – 2), C(3; 4);
12) A(– 3; 3), B(9; – 6), C(7; 8);
13) A(– 5; 0), B(7; 9), C(5; – 5);
14) A(– 7; 2), B(5; 11), C(3; – 3);
15) A(– 5; – 3), B(7; 6), C(5; – 8);
16) A(– 6; – 2), B(6; 7), C(4; – 7);
17) A(– 8; – 4), B(4; 5), C(2; – 9);
18) A(0; – 1), B(12; 8), C(10; – 6);
19) A(– 6; 1), B(6; 10), C(4; – 4);
20) A(– 2; – 4), B(10; 5), C(8; – 9);
21) A(– 3;0), B(9;9), C(7; – 5);
22) A(– 9; – 2), B(3;7), C(1; – 7);
23) A(– 5;2), B(7; – 7), C(5;7);
24) A(– 5;0), B(7;9), C(5; – 5);
25) A(– 5; – 3), B(7; 6), C(5; – 8);
26) A(– 6; – 2), B(6; 7), C(4; – 7);
27) A(– 8; – 4), B(4; 5), C(2; – 9);
28) A(0; – 1), B(12; 8), C(10; – 6);
29) A(– 6; 1), B(6; 10), C(4; – 4);
30) A(– 2; – 4), B(10; 5), C(8; – 9).

7. Розв'язати задачу.

1) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(4; -7; 3), паралельно до площини *2x-3y+z-1=0.*

2) Дано дві точки М(4; 0; -6) і Р(5; -2; 3). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N}=\vec{MP}$.

3) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(3; -5; -2), паралельно до площини *4y+6z-21=0.*

4) Дано дві точки М(7; -3; 2) і Р(4; -6; -2). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N}=\vec{MP}$.

5) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(-4; 0; -2), паралельно до площини *7x-8y+15=0.*

6) Дано дві точки М(3; -1; -5) і Р(0; 3; -4). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N}=\vec{MP}$.

7) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(0; -3; -2), паралельно до площини *-5x-2y-3z+14=0.*

8) Дано дві точки М(-1; -1; 3) і Р(-4; 0; -3). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N}=\vec{MP}$.

9) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(6; 2; -3), паралельно до площини *5x-3z+32=0.*

10) Дано дві точки М(4; -6; -7) і Р(4; -2; 5). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N}=\vec{MP}$.

11) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(-7; 4; -2), паралельно до площини *-3x-y-19=0.*

12) Дано дві точки М(-2; -8; -4) і Р(5; -2; 1). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N}=\vec{MP}$.

13) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(6; 0; -2), паралельно до площини *2x+2y-3z-23=0.*

14) Дано дві точки М(0; -1; 3) і Р(1; 3; 5). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N}=\vec{MP}$.

15) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(1; 1; -1), паралельно до площини *-5x-4y-3z-2=0.*

16) Дано дві точки М(0; -8; 3) і Р(-5; -6; 0). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N}=\vec{MP}$.

17) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(5; 7; -2), паралельно до площини *-5x-7y-2z-47=0.*

18) Дано дві точки М(0; 4; -3) і Р(5; -3; -3). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N} = \vec{MP}$.

19) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(1; 2; -3), паралельно до площини *-6x+4y-z+7=0.*

20) Дано дві точки М(-4; -1; 7) і Р(-2; -3; 0). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N} = \vec{MP}$.

21) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(3; 4; -5), паралельно до площини *2x-2y+3z+5=0.*

22) Дано дві точки М(3; -1; -4) і Р(2; -3; 4). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N} = \vec{MP}$.

23) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(3; 1; -2), паралельно до площини *5x-6y+z=0.*

24) Дано дві точки М(0; -1; 3) і Р(1; 3; 5). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N} = \vec{MP}$.

25) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(6; 8; -7), паралельно до площини *4x-5y+3z-2=0.*

26) Дано дві точки М(6; -3; 1) і Р(4; 2; 0). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N} = \vec{MP}$.

27) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(3; -4; 0), паралельно до площини *4x-2y+z-5=0.*

28) Дано дві точки М(2; -1; 3) і Р(0; 5; -2). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N} = \vec{MP}$.

29) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М(3; 5; -8), паралельно до площини *5x-3y+2z-7=0.*

30) Дано дві точки М(3; 5; 0) і Р(2; 7; -6). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку М, перпендикулярно до вектора $\vec{N} = \vec{MP}$.

8. Розв'язати задачу.

Дано координати точок *A* і *B* та рівняння площини α.

а) Записати рівняння прямої, яка проходить через точки *A* і *B*;

б) визначити координати точки перетину прямої AB із площиною α;

в) записати рівняння прямої, яка проходить через точку А, перпендикулярно до площини α.

1) $A\ (1;\ 0;\ 3)$ і $B\ (7;\ 2;\ -1)$, $\alpha: 2x-y+z-4=0$;

2) $A\ (2;\ -1;\ 3)$ і $B\ (0;\ 5;\ -2)$, $\alpha: 3x-4y+2z-1=0$;

3) $A\ (3;\ -4;\ 0)$ і $B\ (7;\ 5;\ -1)$, $\alpha: 4x-2y+z-2=0$;

4) $A\ (4;\ -7;\ 0)$ і $B\ (1;\ 5;\ 3)$, $\alpha: 2x-y+3z-1=0$;

5) $A\ (2;\ -5;\ 6)$ і $B\ (6;\ -3;\ 0)$, $\alpha: 4x-5y+z-7=0$;

6) $A\ (4;\ -7;\ 3)$ і $B\ (5;\ 2;\ 0)$, $\alpha: 6x-3y+5z-8=0$;

7) $A\ (4;\ -7;\ 3)$ і $B\ (5;\ 2;\ 0)$, $\alpha:\ 6x-3y+5z-8=0$;

8) $A\ (4;\ -7;\ 3)$ і $B\ (1;\ 5;\ 0)$, $\alpha: 2x-3y+z-1=0$;

9) $A\ (6;\ -3;\ 1)$ і $B\ (4;\ 2;\ 0)$, $5x-4y+2z-7=0$;

10) $A\ (4;\ 7;\ -2)$ і $B\ (0;\ -1;\ 3)$, $3x+2y-z+3=0$;

11) $A\ (1;\ 0;\ -1)$ і $B\ (3;\ 4;\ -2)$, $\alpha: 3x+y+z+4=0$;

12) $A\ (1;\ 0;\ 3)$ і $B\ (4;\ 0;\ 3)$, $\alpha: 2x-y+z-4=0$;

13) $A\ (1;\ 3;\ -2)$ і $B\ (3;\ 5;\ -1)$, $\alpha: 2x+3y-z+4=0$;

14) $A\ (1;\ 5;\ 0)$ і $B\ (3;\ -3;\ 4)$, $\alpha: 3x+2y-4z+5=0$;

15) $A\ (3;\ -1;\ 2)$ і $B\ (3;\ -3;\ 0)$, $\alpha: 3x-2y+5z-4=0$;

16) $A\ (1;\ 4;\ -1)$ і $B\ (3;\ -2;\ 4)$, $\alpha: 3x+2y-z+3=0$;

17) $A\ (1;\ -5;\ 0)$ і $B\ (3;\ 2;\ -4)$, $\alpha: 2x-y+2z-3=0$;

18) $A\ (1;\ 2;\ -3)$ і $B\ (3;\ -1;\ 0)$, $\alpha: 3x-2y+3z-4=0$;

19) $A\ (8;\ 4;\ -2)$ і $B\ (-3;\ 5;\ 0)$, $\alpha: 3x-2y+z+3=0$;

20) $A\ (4;\ -6;\ -2)$ і $B\ (0;\ -4;\ 5)$, $\alpha: 5x+3y-4z-6=0$;

21) $A\ (6;\ -3;\ 1)$ і $B\ (4;\ 2;\ 0)$, $\alpha: 5x-4y+2z-7=0$;

22) $A\ (4;\ 0;\ -6)$ і $B\ (5;\ -2;\ 3)$, $\alpha: 5x-3y+z-7=0$;

23) $A\ (5;\ 2;\ 0)$ і $B\ (6;\ 3;\ 4)$, $\alpha: 6x+2y-z+3=0$;

24) $A\ (6;\ 8;\ -7)$ і $B\ (4;\ 3;\ 0)$, $\alpha: 4x-5y+3z-2=0$;

25) $A\ (6;\ 2;\ -3)$ і $B\ (4;\ 0;\ -3)$, $\alpha: 3x+2y-7z+5=0$;

26) $A\ (3;\ 5;\ 0)$ і $B\ (2;\ 7;\ -6)$, $\alpha: 4x-2y+5z-6=0$;

27) $A\ (2;\ -1;\ 3)$ і $B\ (0;\ 5;\ -2)$, $\alpha: 3x-4y+2z-1=0$;

28) $A(3;\ 5;\ -8)$ і $B\ (8;\ -7;\ 2)$, $\alpha: 5x-3y+2z-7=0$;

29) $A\ (3;\ -4;\ 0)$ і $B\ (7;\ 5;\ -1)$, $\alpha: 4x-2y+z-2=0$;

30) $A\ (1;\ -3;\ 6)$ і $B\ (9;\ -3;\ 0)$, $\alpha: 4x-5y+z-7=0$.

9. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку *A* паралельно даній прямій.

1) A (1; 2; –2), $\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$;

2) A (1; 0; 1), $\begin{cases} 2x-2y+z+4=0 \\ x+2y-3z-1=0 \end{cases}$;

3) A (–1; 2; 3), $\begin{cases} x+2y-z+4=0 \\ 3x-y+7z-1=0 \end{cases}$;

4) A (0; 3; –1), $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases}$;

5) A (3; –1; 1), $\begin{cases} 2x-y+4z+1=0 \\ x+5y+2z-4=0 \end{cases}$;

6) A (1; 3; 2), $\begin{cases} 3x+2y-z+3=0 \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases}$;

7) A (7; –3; 1), $\begin{cases} 4x+2y-z+7=0 \\ x-y+2z-3=0 \end{cases}$;

8) A (4; –2; 0), $\begin{cases} 4x-3y+z-8=0 \\ 2x+y-4z+6=0 \end{cases}$;

9) A (4; –2; 6), $\begin{cases} 7x+5y-2z+8=0 \\ 3x-y+z+1=0 \end{cases}$;

10) A (3; 5; –2), $\begin{cases} 3x-2y+4z-5=0 \\ 4x+3y-z+2=0 \end{cases}$;

11) A (8; –3; 6), $\begin{cases} x-3y+2z-7=0 \\ 6x-2y-4z+7=0 \end{cases}$;

12) A (6; –2; 0), $\begin{cases} 4x-6y+2z-1=0 \\ 3x+2y-4z+2=0 \end{cases}$;

13) A (6; –4; 0), $\begin{cases} 7x-3y+z-2=0 \\ 4x+5y-3z+4=0 \end{cases}$;

14) A (8; –2; 4), $\begin{cases} 5x-3y+2z-4=0 \\ 6x+2y-7z+5=0 \end{cases}$;

15) A (8; –3; 5), $\begin{cases} 8x-3y+5z-4=0 \\ 6x+2y+z-5=0 \end{cases}$;

16) A (3; –1; 1), $\begin{cases} x+5y+2z-4=0 \\ 2x-y+4z+1=0 \end{cases}$;

17) A (6; –2; 0), $\begin{cases} 2x-3y+2z-1=0 \\ 4x+5y-4z+7=0 \end{cases}$;

18) A (4; 2; 5), $\begin{cases} 5x-y+2z+6=0 \\ 3x-2y-z+7=0 \end{cases}$;

19) A (3; –1; 1), $\begin{cases} 2x-y+4z+1=0 \\ x+5y+2z-4=0 \end{cases}$;

20) A (6; –2; –3), $\begin{cases} 4x-2y+3z-3=0 \\ 2x-5y-4z-8=0 \end{cases}$;

21) A (1; –1; 0), $\begin{cases} 3x+2y-4z+1=0 \\ x-2y+2z-3=0 \end{cases}$;

22) A (4; –3; 0), $\begin{cases} 5x-2y+z-4=0 \\ 2x-y-z+6=0 \end{cases}$;

23) A (3; –1; 2), $\begin{cases} 2x+y+z-2=0 \\ x-y+2z+3=0 \end{cases}$;

24) A (1; 2; –2), $\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$;

25) A (1; 2; –3), $\begin{cases} 2x-3y+z+1=0 \\ 3x+y+5z-3=0 \end{cases}$;

26) A (5; –3; 0), $\begin{cases} 4x-2y-z+9=0 \\ 5x-3y-z-7=0 \end{cases}$;

27) A (3; 4; –1), $\begin{cases} 2x-3y+4z-1=0 \\ x+y-2z+5=0 \end{cases}$;

28) A (7; –3; 1), $\begin{cases} 4x+2y-z+7=0 \\ x-y+z-3=0 \end{cases}$;

29) A (4; –1; 2), $\begin{cases} 2x-y+z+4=0 \\ x+5y+2z-1=0 \end{cases}$;

30) A (4; –2; 6), $\begin{cases} 7x+5y-2z+8=0 \\ 3x-y+z+1=0 \end{cases}$.

10. Розв'язати задачу.

1) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(0; 4)$ і заданої прямої $y - 1 = 0$ дорівнює 2. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
2) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(0; -1)$ і заданої прямої $y + 4 = 0$ дорівнює $\frac{1}{2}$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
3) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(9; 0)$ і заданої прямої $4 - x = 0$ дорівнює $\frac{3}{2}$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
4) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(0; 4)$ і заданої прямої $9 - y = 0$ дорівнює $\frac{2}{3}$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
5) Знайти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $M_0(-2; -1)$ і прямої $y + 3 = 0$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
6) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(0; 7)$ і заданої прямої $y - 1= 0$ дорівнює $\sqrt{7}$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
7) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(0; -4.5)$ і заданої прямої $y + 8 = 0$ дорівнює $3/4$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
8) Знайти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $M_0(3; 1)$ і прямої $1 – x = 0$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
9) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(0; 2)$ і заданої прямої $2y + 1 = 0$ дорівнює 2. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
10) Знайти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $M_0(-1; -2)$ і прямої $x + 3 = 0$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
11) Знайти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $M_0(2; 2)$ і прямої $y -3= 0$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
12) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(0; 1)$ і прямої $y - 4 = 0$ дорівнює $\sqrt{6}$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
13) Скласти рівняння геометричного місця точок, відстань яких від заданої точки A(0; 2) в два рази менша відстані до прямої $y=8$.
14) Написати рівняння геометричного місця точок, однаково віддалених від початку координат і від прямої $x = -5$. Знайти точки перетину цієї кривої з осями координат і побудувати її. Зробити рисунок.

15) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(2; 0)$ і заданої прямої $2x - 1 = 0$ дорівнює 2. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
16) Знайти траєкторію точки М, яка під час руху залишається вдвічі ближчою до точки A(-1; 0), ніж до прямої x=-4.
17) Написати рівняння геометричного місця точок, сума відстаней кожної з яких до точок F (-2; 0) і F (2; 0) дорівнює $2\sqrt{5}$. Побудувати цю лінію.
18) Скласти рівняння геометричного місця точок, однаково віддалених від початку координат і прямої y=5.
19) Знайти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $M_0(-2; -2)$ і прямої $x + 4 = 0$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
20) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(0; 2)$ і прямої $y - 3 = 0$ дорівнює $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
21) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(-4.5; 0)$ і заданої прямої $x + 8 = 0$ дорівнює $\frac{3}{4}$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
22) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(7; 0)$ і заданої прямої $1 - x = 0$ дорівнює $\sqrt{7}$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
23) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(2; 0)$ і заданої прямої $x–1 = 0$ дорівнює $\sqrt{2}$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
24) Знайти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $M_0(3; 3)$ і прямої $y + 2= 0$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
25) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(-1; 0)$ і заданої прямої $x + 9 = 0$ дорівнює $\frac{1}{3}$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
26) Знайти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $M_0(2; -3)$ і прямої $2 - y = 0$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
27) Знайти рівняння геометричного місця точок, для кожної з яких відношення відстаней до точки $M_0(0; 3)$ і заданої прямої $2 - y = 0$ дорівнює $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Привести одержане рівняння до найпростішого вигляду і побудувати криву.
28) Написати рівняння геометричного місця точок, однаково віддалених від початку координат і від прямої $x = -4$. Знайти точки перетину цієї кривої з осями координат і побудувати її. Зробити рисунок.

29) Написати рівняння геометричного місця точок, віддалених вдвоє дальше від точки $F(-8; 0)$, ніж від прямої $x = -2$. Побудувати цю криву.

30) Визначити траєкторію точки $M(x; y)$, яка рухається так, що в будь-який момент часу знаходиться вдвічі ближче до прямої $x = 1$, ніж до точки $F(4; 0)$. Зробити рисунок.

ТЕСТОВИЙ КОНТРОЛЬ З МОДУЛЯ

"Елементи лінійної та векторної алгебри. Аналітична геометрія"

1. Визначником другого порядку матриці А називають число

а) $a_{11}\,a_{22} + a_{21}\,a_{12}$.б) $a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$.

в) $a_{21}\,a_{12} - a_{11}\,a_{22}$. г) $a_{11}\,a_{21} - a_{21}\,a_{22}$.

2. Якщо у визначнику поміняти місцями з стовпцями, не змінюючи при цьому порядок їх слідування, то величина визначника

а) буде дорівнювати нулю. б) зміниться на протилежне.

в) не зміниться. г) збільшиться у два рази.

3. Визначник $(n\text{-}1)^{го}$ порядку отриманий із даного шляхом викреслення $i^{го}$ рядка і $j^{го}$ стовпця на перетині яких і знаходиться елемент a_{ij} називають

а) мінором до елемента a_{ij}. б) алгебаїчним доповненням до елемента a_{ii} .

в) мінором до елемента a_{ji}. г) алгебаїчним доповненням до елемента a_{ij} .

4. Сума добутків елементів рядка (стовпця) на свої алгебраїчні доповнення дорівнює

а) нулю. б) значенню визначника. в) подвоєному значенню визначника.

г) значенню визначника, взятому з протилежним знаком.

5. Головною діагоналлю квадратної матриці називається ряд чисел

а) $a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}$. б) $a_{11}a_{21}\ldots a_{n1}$. в) $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$. г) $a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}$.

6. Діагональна матриця називається одиничною, якщо

а) всі її елементи, розміщені на головній діагоналі, дорівнюють 1.

б) всі елементи дорівнюють 1.

в) всі її елементи, розміщені поза головною діагоналлю, дорівнюють 1.

г) елементи будь-якого рядка дорівнюють 1.

7. Множення матриць можна виконати лише тоді, коли

а) кількість елементів в стовпці першої матриці дорівнює кількості елементів в рядку другої.

б) вони мають однакову розмірність.

в) кількість елементів в рядку першої матриці дорівнює кількості еле ментів в стовпці другої.

г) вони квадратні.

8. Система називається сумісною, якщо вона

а) немає розв′язків.

б) хоча б один розв′язок.

в) має безліч розв′язків.

г) має точно 2 розв′язки.

9. Система називається визначеною, якщо вона

а) має два розв′язки.

б) має єдиний розв′язок.

в) має безліч розв′язків.

г) більше, ніж один розв′язок.

10. Система буде сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює

а) рангу розширеної матриці цієї системи.

б) рангу розширеної матриці цієї системи мінус 1.

в) рангу розширеної матриці цієї системи плюс 1.

г) нулю.

11. Два ненульові вектори утворюють тупий кут, коли їх скалярний добуток буде

а) додатнім числом; *б*) від'ємним числом;

в) дорівнювати нулю; *г*) дорівнювати одиниці.

12. Якщо координати векторів пропорційні, то ці вектори

а) компланарні; *б*) колінеарні; *в*) співнапрямлені; *г*) протилежно направлені.

13. Мішаний добуток трьох векторів дорівнює

а) об′єму паралелепіпеда, побудованого на векторах; *б*) площі паралелограма;

в) об′єму паралелепіпеда, побудованого на векторах і взятому зі знаком плюс, якщо трійка векторів ліва і зі знаком мінус у противному випадку; *г*) об′єму паралелепіпеда, побудованого на векторах і взятому зі знаком плюс, якщо трійка векторів права і зі знаком мінус у противному випадку.

14. Векторний добуток векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ у координатній формі обчислюється за такою формулою:

а) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$; б) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}$;

в) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$; г) $\vec{a}\times\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

15. Будь-яка величина, що має напрям називається

а) відрізком; б) променем; в) вектором; г) прямою.

16. Довжина вектора $|\vec{a}|$ є величина

а) $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$; б) $|\vec{a}|=\sqrt{a_x+a_y}$; в) $|\vec{a}|=a_x^2+a_y^2$; г) $|\vec{a}|=a_x+a_y$.

17. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{в}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови:

а) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\sin\angle(\vec{a};\vec{в})$; $\vec{c}\perp\vec{a}$ і $\vec{c}\perp\vec{в}$; трійка векторів $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ ліва;

б) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\sin\angle(\vec{a};\vec{в})$; трійка векторів $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ права;

в) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\sin\angle(\vec{a};\vec{в})$; $\vec{c}\perp\vec{a}$ і $\vec{c}\perp\vec{в}$; трійка векторів $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ права;

г) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos\angle(\vec{a};\vec{в})$; $\vec{c}\perp\vec{a}$ і $\vec{c}\perp\vec{в}$; трійка векторів $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ права;

18. Базисом лінійного простору називається

а) система векторів, якщо їх комбінація дорівнює нулю тільки при умові, коли всі коефіцієнти дорівнюють нулю; *б*) система векторів, якщо їх комбінація дорівнює нулю при умові, що хоча б один з коефіцієнтів відмінний від нуля. *в*) система лінійно незалежних векторів така, що будь-який вектор лінійного простору може бути представлений у вигляді їх лінійної комбінації. *г*) системі векторів, якщо в неї є нульовий вектор.

19. Два ненульові вектори утворюють гострий кут, коли їх скалярний добуток буде

а) додатнім числом; *б*) від'ємним числом;

в) дорівнювати нулю; *г*) дорівнювати одиниці.

20. Добутком вектора $\bar{a}$ на число λ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови:

а) $|\vec{c}|=|\lambda||\vec{a}|$ і якщо $\lambda>0$, то $\vec{a}$ і $\vec{c}$ спів напрямлені і якщо $\lambda<0$, то $\vec{a}$ і $\vec{c}$ протилежно направлені;

б) для якого виконується рівність $\vec{a}+\vec{в}=\vec{c}$.

в) являє собою діагональ паралелограма побудованого на цих векторах, як на сторонах; *г)* $|\vec{c}| = |\lambda||\vec{a}|$ і якщо $\lambda > 0$, то $\vec{a}$ і $\vec{c}$ протилежно направлені і якщо $\lambda < 0$, то $\vec{a}$ і $\vec{c}$ співнапрямлені.

21. Загальне рівняння прямої у просторі буде таким

а) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$; *б)* $\vec{r} - \vec{r}_0 = t_1\vec{p} + t_2\vec{q}$;

в) $Ax + By + Cz + D = 0$; *г)* $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

22. Назвіть загальне рівняння прямої на площині

а) *Ax+By+C=0;* б) $\frac{x}{a} + \frac{y}{в} = 1$; в) $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$; г) $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$.

23. За якою формулою визначається кут між прямими p_1 і p_2, які задані загальними рівняннями?

а) $\sin\angle(p_1; p_2) = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$; б) $\cos\angle(p_1; p_2) = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$;

в) $\cos\angle(p_1; p_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{(A_1^2 + B_1^2)\cdot(A_2^2 + B_2^2)}$; г) $\sin\angle(p_1; p_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{(A_1^2 + B_1^2)\cdot(A_2^2 + B_2^2)}$.

24. За якою формулою визначається відстань від точки до прямої?

а) $d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$; б) $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{A^2 + B^2}$; в) $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$; г) $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 - B^2}}$.

25. Вектор, перпендикулярний до прямої $ax + вy + c = 0$ має координати

а) $(a; в; c)$; б) $(a; в)$; в) $(a; c)$; г) неможливо визначити.

26. Якщо у загальному рівнянні прямої $A = 0$, то пряма

а) паралельна осі *Ox*; б) паралельна осі *Oy*;

в) проходить через початок координат; г) співпадає з віссю *Oy*.

27. Кут між прямою та площиною можна обчислити за формулою

а) $\sin\psi = \cos\varphi = \frac{Am + Bn + Ck}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}$; *б)* $\cos\angle(p_1; p_2) = \pm\frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$

;

в) $\cos\angle(\pi_1; \pi_2) = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$; *г)* $x\cos\alpha + ycco\beta + z\cos\nu - p = 0$

28. Який має вигляд рівняння прямої у відрізках на осях?

а) *Ax+By+C=0;* б) $\frac{x}{a} + \frac{y}{в} = 1$; в) $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$; г) $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$.

29. Рівняння $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$ називають

а) загальним рівнянням прямої; *б*) рівнянням прямої, що проходить через дві точки;

в) рівнянням прямої « у відрізках на осях»; *г*) загальним рівнянням еліпса.

30. Якщо пряма задана рівнянням $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$, то $(l;m)$ це координати

а) напрямного вектора; *б*) паралельного до неї вектора;

в) точки, що належить прямій; *г*) перпендикулярного до неї вектора

Розділ 4
ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

§ 1. Комплексні числа

На множині дійсних чисел не існує такого числа, квадрат якого дорівнював би *-1*. Позначимо це число буквою i та назвемо *уявною одиницею.*

$$i^2=-1$$

Введемо до розгляду числа вигляду bi, де $b\in R$. Такі числа називають *уявними.*

Суму дійсного числа *а* та уявного bi записують у вигляді $a+bi$ та називають *комплексним числом* .

Дійсне число *а* називають *дійсною частиною* комплексного числа $a+bi$, а число *bi* — його *уявною частиною*.

Комплексне число позначають *z:*

$$z=a+bi$$

Два комплексні числа $a+bi$ і $c+di$ називають *рівними*, якщо $a=c$ і $b=d$.

Два комплексні числа виду $a+bi$ та $a-bi$ називають *спряженими*.

Комплексні числа зображають на площині. Для цього вибирають на площині прямокутну систему координат. Комплексне число $a+bi$ зображається точкою *М (х, у),* абсциса *х* якої дорівнює дійсній частині комплексного числа *(х = а),* а ордината дорівнює уявній частині комплексного числа *(у = b)* (рис.4.1).

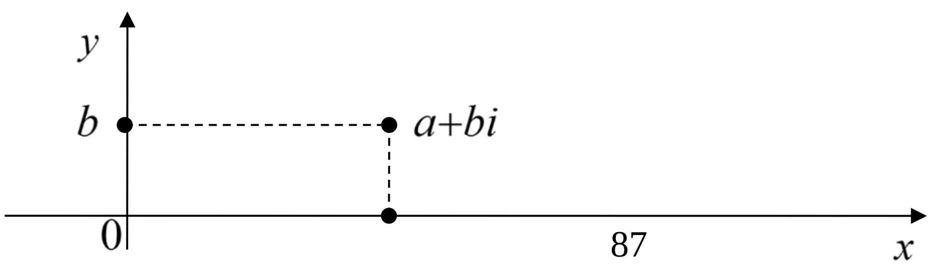


Рис. 4.1

Приклад 1. Зобразити на площині комплексні числа:

а) 3 + 4*i*; *б)* – 2 + 3*i*; *в)* – 3 – 2*i*; *г)* 4 + 0*i*; *д)* 0 + 2*i*.

Розв'язання. Побудова виконана на рис. 4.2.

Сумою двох комплексних чисел $a+bi$ і $c+di$ називають комплексне число $(a+c)+(b+d)i$;

$$a+bi+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

Різницею двох комплексних чисел $a+bi$ та $c+di$ називають комплексне число $(a-c)+(b-d)i$.

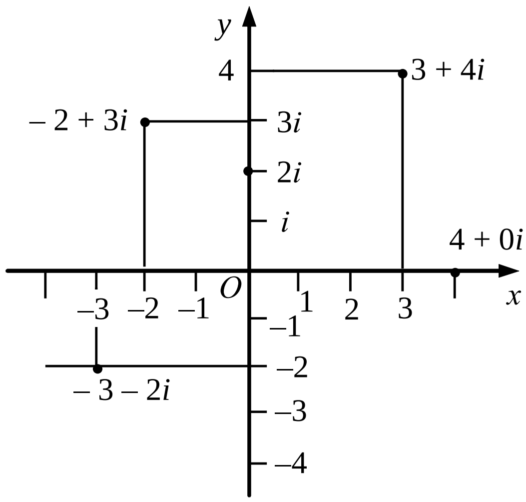


Рис. 4.2

Добутком двох комплексних чисел $a+bi$ і $c+di$ називають комплексне число $(ac-bd)+(ad+bc)i$.

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bidi+bci=ac-bd+(ad+bc)i.$$

Часткою двох комплексних чисел $a+bi$ і $c+di$ називають комплексне число

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i.$$

Зауваження. На практиці не завжди користуються формулами. Можна комплексні числа множити, як двочлени, а виконуючи ділення помножити чисельник та знаменник дробу на число спряжене із знаменником.

Приклад 2. Дано числа $z_1=2+3i$; $z_2=-4+i$; $z_3=-5i$. Обчислити:

а) z_1+z_2; *б)* z_2-z_3; *в)* $z_1 \cdot z_2$; *г)* $\dfrac{z_2}{z_1}$.

Розв'язання. *а*) $z_1 + z_2 = (2+3i)+(-4+i) = (2+(-4))+(3+1)i = -2+4i$;

б) $z_2 - z_3 = (-4+i)-(-5i) = -4+(1-(-5))i = -4+6i$;

в) для множення комплексних чисел скористаємось спочатку формулою, наведеною вище

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(-4+i) = (2\cdot(-4)-3\cdot 1)+(2\cdot 1+3\cdot(-4))i = -11-10i \ .$$

Помножимо ці числа за правилом множення многочленна на многочлен

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(-4+i) = -8+2i-12i+3i^2 = -8-10i-3 = -11-10i \ .$$

Результат один і той же, тому можна множити будь-яким способом.

г) виконуючи ділення домножимо спочатку чисельник та знаменник дробу на число $2-3i$, яке спряжене із знаменником.

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-4+i}{2+3i} = \frac{(-4+i)\cdot(2-3i)}{(2+3i)\cdot(2-3i)} = \frac{-8+12i+2i-3i^2}{4-9i^2} = \frac{-8+14i+3}{4+9} = \frac{-5+14i}{13} = -\frac{5}{13}+\frac{14}{13}i$$

.

Приклад 3. Розв'язати квадратне рівняння та зробити перевірку $x^2-4x+53=0$

.

Розв'язання. Обчислимо дискримінант:

$$D = b^2-4ac = (-4)^2-4\cdot 53 = 16-212 = -196 = 196i^2;$$

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{196i^2}}{2} = \frac{4-14i}{2} = 2-7i; \quad x_2 = \frac{4+\sqrt{196i^2}}{2} = \frac{4+14i}{2} = 2+7i \ .$$

Перевірка: 1) $(2-7i)^2-4(2-7i)+53=0 \Rightarrow 4-28i+49i^2-8+28i+53=0 \Rightarrow$

$$4-28i-49-8+28i+53=0 \Rightarrow 0=0 \ .$$

2) $(2+7i)^2-4(2+7i)+53=0 \Rightarrow 4+28i+49i^2-8-28i+53=0 \Rightarrow$

$$4+28i-49-8-28i+53=0 \Rightarrow 0=0 \ .$$

Зауваження. Якщо квадратне рівняння має комплексні корені, то це обов'язково спряжені числа.

Модулем комплексного числа $a+bi$ називають довжину вектора (рис. 4.3), який відповідає цьому числу (позначається *r* або $|z|$):

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

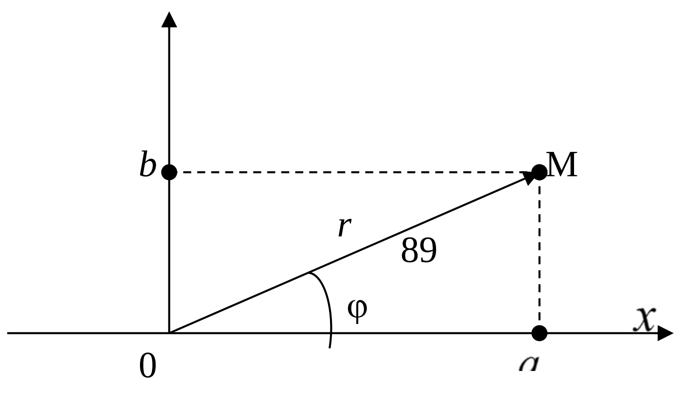


Рис. 4.3

Кут φ між додатнім напрямом осі *Ox* і вектором $\overrightarrow{OM}$, де точка *M* зображає комплексне число $a+bi$, називають *аргументом* комплексного числа $a+bi$, причому величина кута вважається додатною, якщо відлік ведеться проти годинникової стрілки, і від'ємною в противному випадку.

Кожне відмінне від нуля комплексне число має нескінченну кількість аргументів, які відрізняються один від одного на *2πk*. Для числа 0 аргумент не визначений.

Значення аргументу, яке належить проміжку $[-\pi;\pi]$, називають *головним.*

Аргумент φ комплексного числа $a+bi$ можна визначити із рівності: $tg\varphi=\frac{b}{a}$, спочатку потрібно визначити (за знаками *a* і *b*) в якій чверті знаходиться точка $a+bi$ і потім знайти такий розв'язок рівняння $tg\varphi=\frac{b}{a}$, який визначає кут у цій чверті (рис. 4.4).

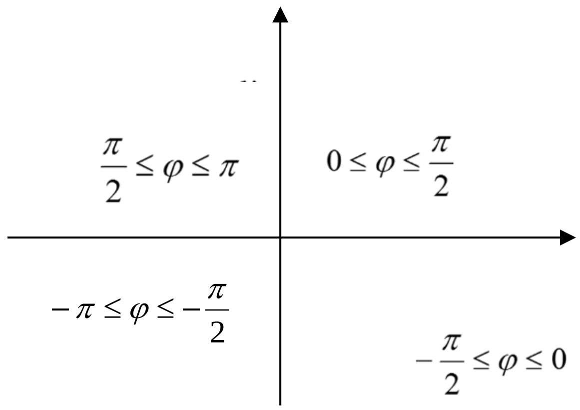


Рис. 4.4

Аргумент дійсного додатного числа має головне значення 0°; від'ємного числа 180°. Головні значення аргументу спряжених комплексних чисел мають одну й ту саму абсолютну величину, але протилежні знаки. Наприклад, головні значення аргументу спряжених чисел – 3 + 3*i* та – 3 – 3*i* дорівнюють 135° і – 135°.

Запис числа у вигляді $a+bi$ називають *алгебраїчною формою* комплексного числа.

Нехай дано комплексне число $z=a+bi$ (рис. 4.3). Знайдемо

$$a = r\cos\varphi\,;\ b = r\sin\varphi\,.$$

Тому

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такий запис називають *тригонометричною формою* запису комплексного числа.

Модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку модулів, а аргумент – сумі аргументів множників.

Модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів, а аргумент – різниці аргументів множників.

Приклад 4. Зобразити на координатні площині комплексні числа $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ та $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$. Знайти їх добуток та частку.

Розв’язання*.* За означенням аргументом комплексного числа є кут який утворює радіус-вектор даного числа з додатнім напрямом осі *Ox*, а модулем довжина цього радіус-вектора (рис. 4.5).

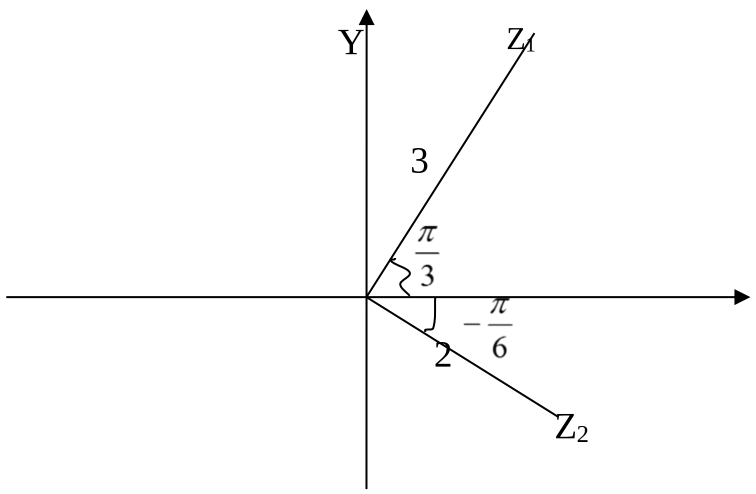


Рис. 4.5

Для обчислення добутку комплексних чисел, записаних у тригонометричні формі потрібно їх модулі перемножити, а аргументи додати.

$$z_1 \cdot z_2 = 3\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Щоб поділити комплексні числа, записані у тригонометричні формі потрібно їх модулі поділити, а аргументи відняти.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) = 1.5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Приклад 5. Перейти від алгебраїчної форми комплексних чисел до їх тригонометричної форми.

а) $z=5i$; б) $z=-9$; в) $z=\sqrt{15}+i\cdot\sqrt{15}$; г) $-5\sqrt{6}-5\sqrt{2}i$.

Розв'язання. Тригонометрична форма комплексного числа має вигляд:

$z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, де $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $tg\varphi=\dfrac{b}{a}$.

а) Дійсна частина цього числа дорівнює нулю, тому $|z|=\sqrt{0^2+5^2}=5$. Так як це число лежить на уявні осі, то кут $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, звідси $z=5\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

б) Дане число дійсне, воно належить від'ємні піввісі осі *Ох* (кут $\varphi=\pi$) і його модуль (відстань від початку відліку до даної точки) дорівнює 9. Отже маємо $z=9(\cos\pi+i\sin\pi)$.

в) $|z|=\sqrt{\left(\sqrt{15}\right)^2+\left(\sqrt{15}\right)^2}=\sqrt{30}$; $\varphi=arctg\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}}=arctg1$, так як число $z=\sqrt{15}+i\cdot\sqrt{15}$ належить I чверті, то $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. Тобто $z=\sqrt{30}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

г) $|z|=\sqrt{\left(-5\sqrt{6}\right)^2+\left(-5\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{25\cdot6+25\cdot2}=5\sqrt{8}=10\sqrt{2}$; $tg\varphi=\dfrac{-5\sqrt{2}}{-5\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Оскільки дане число належить III чверті, то $-\pi\le\varphi\le-\dfrac{\pi}{2}$, тобто $\varphi=-\dfrac{5\pi}{6}$. Отже $z=10\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$.

Зауваження. Щоб перейти від тригонометричної форми комплексного числа до його алгебраїчної форми потрібно обчислити значення синуса та косинуса і розкрити дужки. Наприклад,

$$z=5\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{3}\right)=5\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2{,}5+2{,}5\sqrt{3}i.$$

При піднесенні комплексного числа до степеня з натуральним показником його модуль підноситься до степеня з цим показником , а аргумент множиться на показник степеня. Це твердження називають *формулою Муавра.* Тобто

$$z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

Приклад 6. Піднести до степеня $(-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i)^6$.

Розв’язання. Можна піднести це число до степеня перемноживши його на себе 6 разів, або скориставшись біномом Ньютона. Але простіше перейти до тригонометричної форми і використати формулу Муавра.

$|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $tg\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{3}$. Число належить IV чверті, тому $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$. Одержуємо $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$. За формулою Муавра, щоб піднести число у тригонометричні формі до степеня потрібно модуль числа піднести до цього степеня, а аргумент помножити на показник степеня.

$$z^9 = \left(2\sqrt{2}\right)^9\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\cdot 9\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\cdot 9\right)\right) = 2^{13,5}\left(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)\right) .$$

Відкинемо повний період у аргументі і маємо $z^9 = 2^{13,5}\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right)$.

Число z називають *коренем n-го степеня* числа ω, якщо $z^n = \omega$.

Корінь *n-го* степеня з будь-якого комплексного числа існує та має рівно *n* значень.

Приклад 7. Добути корінь комплексного числа $\sqrt[3]{8}$.

Розв’язання. Відомо, що на множині дійсних чисел такий корінь єдиний $\sqrt[3]{8} = 2$, але на множині комплексних чисел їх буде 3 .

Запишемо спочатку число 8 у тригонометричні формі. Модуль цього числа дорівнює 8, а аргумент $\varphi = 0$, тому $8 + 0i = 8(\cos 0 + i\sin 0)$. Для добування кореня скористаємось формулою Муавра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \text{ де } n = 0,1,\ldots,n-1.$$

$$\sqrt[3]{8 + 0i}_{\,1} = \sqrt[3]{8}\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 2;$$

$$\sqrt[3]{8 + 0i}_{\,2} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0 + 2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{0 + 2\pi\cdot 1}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

;

$$\sqrt[3]{8 + 0i}_{\,3} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0 + 2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{0 + 2\pi\cdot 2}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

.

Запитання для самоперевірки

1. Що називають комплексним числом?
2. Які комплексні числа називаються рівними? Які спряженими?

3. Що називають сумою (різницею, добутком, часткою) комплексних чисел?

4. Що таке модуль комплексного числа? Його аргумент?

5. Як можна обчислити аргумент комплексного числа?

6. Як помножити (поділити) комплексні числа, записані у тригонометричній формі?

7. Записати формулу Муавра для піднесення до степеня комплексного числа, записаного у тригонометричній формі.

8. Записати формулу для добування кореня з комплексного числа, записаного у тригонометричній формі.

Навчальні завдання

1. Виконати дії: а) $z_1 + z_2$; б) $z_2 - z_4$; в) $z_1 \cdot z_2 - z_3$; г) $\frac{z_2}{z_1} + z_4$, якщо

а) $z_1 = 5 - i$, $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = 9$, $z_4 = 3i$;

б) $z_1 = -2 + 5i,\ z_2 = 8 + i,\ z_3 = 1,\ z_4 = -2i$;

в) $z_1 = 10 - 2i,\ z_2 = -8 - i,\ z_3 = 42,\ z_4 = i$;

г) $z_1 = -4 - 5i,\ z_2 = 18 + 11i,\ z_3 = 2,\ z_4 = 25i$;

д) $z_1 = 2 + 10i,\ z_2 = -3 + 6i,\ z_3 = 40,\ z_4 = -3i$.

2. Розв’язати квадратне рівняння та зробити перевірку.

а) $x^2 - 8x + 41 = 0$; *б)* $x^2 - 4x + 53 = 0$; *в)* $x^2 - 10x + 29 = 0$;

г) $4x^2 - 4x + 101 = 0$; *д)* $4x^2 + 12x + 109 = 0$.

3. Обчислити добуток $z_1 \cdot z_2$ та частку $\frac{z_1}{z_2}$.

а) $z_1 = 8\left(\cos 60^0 + i \cdot \sin 60^0\right);\ z_2 = 5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{3}\right);$

б) $z_1 = 10\left(\cos 130^0 + i \cdot \sin 130^0\right);\ z_2 = 13\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4}\right);$

в) $z_1 = 15\left(\cos 350^0 + i \cdot \sin 350^0\right);\ z_2 = 12\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right)$

г) $z_1 = 9\left(\cos 320^0 + i \cdot \sin 320^0\right);\ z_2 = 12\left(\cos\frac{7\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{2}\right);$

д) $z_1 = 6\left(\cos 300^0 + i \cdot \sin 300^0\right);\ z_2 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{3}\right).$

4. Записати в тригонометричній формі числа:

а) $8+8i$,   б) $-3\sqrt{3}-3i$,   в) $-11+11i$,   г) $5\sqrt{3}-5i$;

д) $-2i$,   е) 8,   є) $8i$,   ж) -15.

5. Обчислити:

а) z^5 та $\sqrt[3]{z}$, якщо $z=1+i\sqrt{3}$; б) z^7 та $\sqrt[4]{z}$, якщо $z=\sqrt{6}-{}^{3}\sqrt{2};$;

в) z^{10} та $\sqrt{z}$, якщо $z=-1-\sqrt{3}\,i$; г) z^6 та $\sqrt[5]{z}$, якщо $z=-2\sqrt{3}+2^{3};$;

д) z^8 та $\sqrt[6]{z}$, якщо $z=3+3i$.

6. Розв'язати рівняння на множині комплексних чисел:

а) $z^3=64$;   б) $z^3+8i=0$;   в) $z^4-81=0$;   г) $z^5+32=0$

7. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases}(3-i)x+(4+2i)y=2+6i,\\(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i.\end{cases}$ б) $\begin{cases}(2+i)x+(92-i)y=6,\\(3+2i)x+(3-2i)y=8.\end{cases}$

§ 2. Границя функції

Якщо задана закономірність, згідно з якою кожному натуральному числу 1, 2, 3, …, відповідає деяке дійсне число, то говорять, що задано *послідовність.*

Число a називають *границею послідовності* $\{a_n\}$, якщо для кожного, як завгодно малого, додатного числа $\varepsilon>0$ існує таке число $N(\varepsilon)$, що $|a_n-a|<\varepsilon$ для всіх $n>N(\varepsilon)$.

Позначення: $\lim\limits_{x\to\infty} a_n=a$.

Нехай функція визначена в проколотому околі точки x_0.

Означення. Число А називають ***границею функції*** $y=f(x)$ ***в точці*** x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує додатне число $\delta(\varepsilon)$ таке, що для будь-якого x, для якого справедливі умови: $|x-x_o|<\delta(\varepsilon)$ і $x\neq x_0$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=A$.

Геометрична ілюстрація означення подана на рис.4.6.

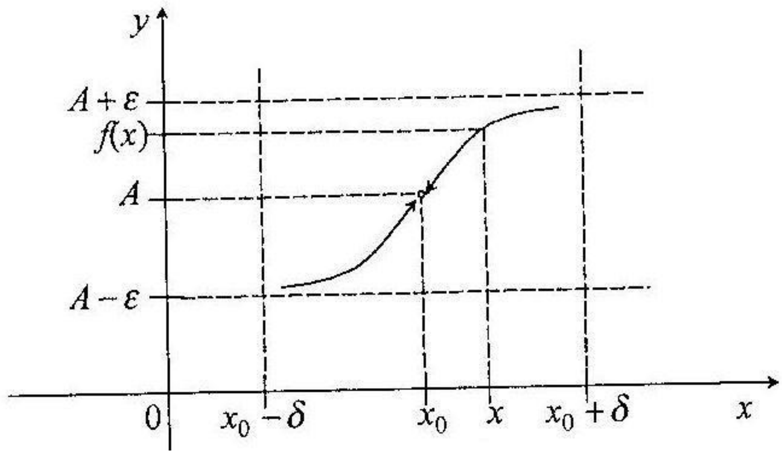


Рис.4.6.

З означення границі функції в точці слідує:

1) якщо границя функції існує, то вона єдина;
2) існування, або не існування границі функції в точці не залежить від того визначена функція в цій точці, чи не визначена;
3) існування, або не існування границі функції в точці залежить від поведінки функції в досить малому околі цієї точки, тобто це поняття є локальним.

Число А називають *границею функції* $y = f(x)$ *зліва (справа)* в точці x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує додатне число $\delta(\varepsilon)$ таке, що для будь-якого x, для якого виконується умова: $0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon)$ $\left(0 < x - x_o < \delta(\varepsilon)\right)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначається: $\lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x) = A$; $\lim\limits_{x \to x_o + 0} f(x) = A$.

Приклад 1. Знайти границі зліва і справа в точці $x_0 = 0$ і побудувати схематично її графік:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & при\, x \le 0, \\ x^2 + 1 & при\, x > 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо спочатку односторонні границі:

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} (2x - 3) = -3$;

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} \left(x^2 + 1\right) = 1$.

Побудуємо схематично її графік: якщо $x \le 0$ то графіком є пряма $y = 2x - 3$, якщо $x > 0$ — парабола $y = x^2 + 1$ (рис.4.7).

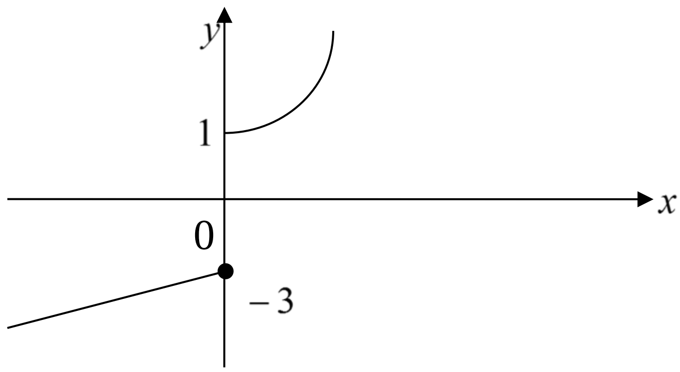


Рис. 4.7

Функцію називають *нескінченно малою в точці* x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 0$.

Функцію називають *нескінченно великою в точці* x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \infty$.

Властивості границь

1. Границя функції в точці існує тоді і тільки тоді, коли існують односторонні границі функції в цій точці і вони рівні.

2. Якщо функція *f(x)* має границю в точці x_0, то в деякому проколотому околі цієї точки вона обмежена.

3. Якщо функція *f(x)* має границю в точці x_0, причому $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$ то в деякому проколотому околі цієї точки має місце представлення *f(x)=A+*$\alpha(x)$, де $\alpha(x)$– нескінченно мала функція в точці x_0.

4. Нехай $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = B$, тоді

$$\lim_{x \to x_o} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \to x_o} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \to x_o} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

5. Якщо функція *f(x)* має границю в точці x_0 і в деякому проколотому околі цієї точки має місце нерівність $f(x) \leq A \quad (f(x) \geq A)$, то $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) \leq A$ ($\lim\limits_{x \to x_o} f(x) \geq A$).

6. Нехай в деякому проколотому околі точки x_0 має місце нерівність $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$, причому $\lim\limits_{x \to x_o} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = A$, тоді $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$.

7. $\lim\limits_{x \to x_o} C = C$.

8. $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^m = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x) \right)^m$.

9. Якщо границі функцій $f(x)$ і $g(x)$ в точці x_0 існують і скінченні, то

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \right)^{g(x)} = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

Деякі границі, що часто зустрічаються в обчисленнях

1. $\lim\limits_{x \to \infty} ax = \infty$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{a} = \infty$

3. $\lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{a}{x} = -\infty$

4. $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{a}{x} = \infty$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a}{x} = \infty$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a}{x} = 0$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} 0, & якщо\ 0 < a < 1 \\ \infty, & якщо\ a > 1 \end{cases}$

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & якщо\ a > 1 \\ \infty, & якщо\ 0 < a < 1 \end{cases}$

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & якщо\ a > 1 \\ -\infty, & якщо\ 0 < a < 1 \end{cases}$

10. $\lim\limits_{x \to 0+0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & якщо\ a > 1 \\ +\infty, & якщо\ 0 < a < 1. \end{cases}$

Обчислення границь деяких функцій

а) ***Дробово-раціональна функція.***

Щоб знайти границю дробово-раціональної функції $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ при $x \to a$, необхідно підставити граничне значення аргументу $x = a$ у дану функцію.

• Якщо при цьому чисельник та знаменник відмінні від нуля, то границею буде відношення $\dfrac{P(a)}{Q(a)}$.

• Якщо при $x = a$ чисельник має границю, відмінну від нуля, а знаменник $Q(a) \to 0$, то дана функція не має границі, тобто $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

• Для того, щоб знайти границю дробово-раціональної функції у випадку, коли при $x \to a$ чисельник та знаменник дробу перетворюються в 0, необхідно чисельник та знаменник дробу поділити на $(x-a)$ і перейти до границі. Це правило базується на теоремі Безу: якщо многочлен перетворюється в 0 при $x = a$, то він без остачі ділиться на $(x-a)$.

• Щоб знайти границю дробово-раціональної функції при $x \to \infty$, необхідно підставити $x \to \infty$ в чисельник та знаменник дробу. Якщо при цьому отримуємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то ділимо чисельник та знаменник на x^n, де n– найвищий степінь многочленів $P(x)$ та $Q(x)$. Після чого застосовуємо основні теореми про границі і властивість нескінченно малих величин ($\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0$, де a– стале число).

Приклад 1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x \to -a} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 10}$, якщо а) $a = 1$; б) $a = 3$; в) $a = -2$; г) $a = \infty$.

2) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3}$.

Розв'язання.

а) Підставимо на місце x його граничне значення a. Якщо a входить в область визначення дробово-раціональної функції, то $\lim\limits_{x \to a} R(x) = R(a)$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - x - 6} = \frac{3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2}{1^2 - 1 - 6} = \frac{6}{-6} = -1;$$

б) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - x - 6} = \frac{3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 2}{3^2 - 3 - 6} = \frac{40}{0}$ чисельник має границю, відмінну від нуля, а значення знаменника прямує до 0, тому дана функція не має границі, тобто $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - x - 6} = \infty$.

в) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{0}{0}\right]$ Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу і скоротимо дріб на $(x-(-2))$.

Примітка. Для розкладання на множники квадратного тричлена використовують таку теорему: якщо x_1 та x_2 корені квадратного тричлена ax^2+bx+c, то цей тричлен розкладається на множники за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Отже

$$\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+5x-2}{x^2-x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-2}\frac{3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to-2}\frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x-3)}=\lim_{x\to-2}\frac{(3x-1)}{(x-3)}=$$

$$=\frac{3\cdot(-2)-1}{-2-3}=\frac{-7}{-5}=1\frac{2}{5};$$

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+5x-2}{5x^2+14x+8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Щоб ліквідувати цю невизначеність, можна чисельник та знаменник дробу почленно поділити на найвищу степінь многочлена (в даному випадку на x^2) та застосувати основні теореми про границі і властивість нескінченно малих величин ($\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0$, де a– стале число).

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+5x-2}{5x^2+14x+8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{14x}{x^2}+\frac{8}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}{5+\frac{14}{x}+\frac{8}{x^2}}=\frac{3+0-0}{5+0+0}=\frac{3}{5}.$$

б) ***Найпростіші ірраціональні вирази.***

Приклад 2. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to3}\frac{2-\sqrt{x+1}}{x-3}$.

Розв'язання.

Безпосередня підстановка граничного значення аргументу $x=3$ приводить до невизначеності вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Щоб розкрити цю невизначеність домножимо чисельник та знаменник на вираз $2+\sqrt{x+1}$, спряжений із чисельником.

$$\lim_{x\to3}\frac{2-\sqrt{x+1}}{x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{\left(2-\sqrt{x+1}\right)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{(x-3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to3}\frac{4-\sqrt{(x+1)}^2}{(x-3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(4-(x+1))}{(x-3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)}{(x-3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to3}\frac{-1}{\left(2+\sqrt{x+1}\right)}=-\frac{1}{4}.$$

Примітка. Для ліквідації ірраціональності використовують такі формули:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2;$$

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3;$$

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$$

*в) **Перша чудова границя***

Границя відношення синуса нескінченно малої дуги до самої дуги, вираженої в радіанах, дорівнює одиниці.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ або } \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Приклад 3. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{\sin 5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg33x}{x}$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\sin 7x}{7x}=7\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}=7\cdot 1=7$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{\sin 5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x\cdot\cos 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}\cdot 1=$

$=\dfrac{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\dfrac{3}{5}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg33x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix} t=arctg33x,\ 33x=tgt, \\ x=\dfrac{tg\,t}{33},\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{33t}{tg\,t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{33t\cos t}{\sin t}=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{33\cos t}{1}=1\cdot 33=33.$

*г) **Друга чудова границя***

Границя функції $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ існує та дорівнює числу e($e\approx 2.718$), тобто

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \text{ або } \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

Відзначимо, що в указаній границі границею основи $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ є 1, а показник степеня прямує до нескінченності.

Цю границю називають *неперовим числом* (Дж. Непер (1550-1617) - шотландський математик) і позначають літерою e. Його наближене значення з точністю до 10^{-15} дорівнює 2,718281828459045, з точністю до 10^{-2} (сотих) – 2,72. Доведено, що число e ірраціональне. Логарифми з основою e називають *натуральними логарифмами* і позначають $\ln x$.

Десятковий логарифм числа дорівнює його натуральному логарифму, помноженому на модуль переходу M = 0,43429....

$$\lg x = M \ln x.$$

Число e відіграє важливу роль у математиці і природознавстві.

Приклад 4. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1-23x)^{\frac{5}{x}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+6}{3n-5}\right)^{-3n+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$.

Розв’язання.

а) Щоб використати другу чудову границю позначимо $-23x$ через α:

$$\lim_{x\to 0}(1-23x)^{\frac{5}{x}} = \left[1^{\infty}\right] = \left|\begin{aligned}&\alpha=-23x\\ &x=\frac{\alpha}{-23}\end{aligned}\right| = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{\frac{5}{\alpha}}{-23}} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{-115}{\alpha}} = \left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-115} = e^{-115}$$

б) Виділимо у заданої функції цілу частину, для цього у чисельнику віднімемо і додамо 5

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+6}{3n-5}\right)^{-3n+1} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5+5+6}{3n-5}\right)^{-3n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{11}{3n-5}\right)^{-3n+1} =$$

$$= \left|\begin{aligned}&\frac{11}{3n-5}=\alpha \Rightarrow n=\frac{11}{3\alpha}+\frac{5}{3}\\ &n\to\infty, \Rightarrow \alpha\to 0\end{aligned}\right| = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-3\left(\frac{11}{3\alpha}+\frac{5}{3}\right)} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{11}{\alpha}-5}.$$

Використавши властивості степенів $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$ та $a^{mn}=\left(a^m\right)^n$, а також властивості границі $\lim\limits_{x\to x_o}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_o}(f(x))\cdot\lim\limits_{x\to x_o}(g(x))$ та $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^m = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^m$, матимемо

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{11}{\alpha}-5} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{11}{\alpha}}\cdot\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-5} = \left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-11}\cdot 1 = e^{-11}.$$

в) При знаходженні границі даного виразу використовують другу чудову границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$, дії із степенями та властивості границь.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5+2}{x+5}\right)^{2x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+5}\right)^{2x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x+5}{2}}\right)^{\frac{x+5}{2}}\right)^{\frac{2}{x+5}\cdot(2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x+5}{2}}\right)^{\frac{x+5}{2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+8}{x+5}}=e^4.$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулювати означення границі функції $y=f(x)$ в точці x_0.
2. Що називають границею функції $y=f(x)$ зліва (справа) в точці ?
3. Яку функцію називають нескінченно малою (нескінченно великою) в точці?
4. Яку функцію називають нескінченно малою в точці?
5. Яку функцію називають нескінченно великою в точці?
6. Який існує зв'язок між нескінченно великими і нескінченно малими величинами?
7. Сформулювати властивості границь.
8. Назвіть чудові границі.

Навчальні завдання

Знайти такі границі:

8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+2x-15}{x^2+3x-18}$, якщо *а*) *а*=3; *б*) *а*=1; *в*) *а*=∞.

9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{2x^2+14x+20}{3x^2+14x-5}$, якщо *а*) *а*=-5; *б*) *а*=2; *в*) *а*=∞.

10. $\lim\limits_{x\to a}\frac{3x^2-7x-6}{2x^2-5x-3}$, якщо *а*) *а*=3; *б*) *а*=-1; *в*) *а*=∞.

11. $\lim\limits_{x\to a}\frac{2x^2-3x-2}{x^2+x-6}$, якщо *а*) *а*=2; *б*) *а*=4; *в*) *а*=∞.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{3-x}$

14. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$.

15. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+7}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{9x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{tg15x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\arcsin 2x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 6x}{6x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{2x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{arctg12x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{4}{x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{9}{x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{3}{13x}}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{6x+4}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{3x+1}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+4}{2x-9}\right)^{3x+1}$.

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-4}\right)^{2x+1}$

§ 3. Нескінченно малі величини

Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою* при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Функцію називають *нескінченно великою* в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\infty$.

Нескінченно малі функції часто порівнюють між собою по швидкості наближення до нуля. Так, наприклад, із двох функцій $\alpha(x)=x$ і $\beta(x)=x^{10}$ нескінченно малих при $x\to 0$, x^{10} наближається до нуля "швидше" ніж *x*.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою більш високого порядку,* ніж $\beta(x)$.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C,\quad C\neq 0$, то нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають *нескінченно малими одного порядку малості*. Якщо *C*=1, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають *еквівалентними* нескінченно малими.

3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=0$, то говорять, що функція $\alpha(x)$ є *нескінченно малою в точці* x_0 *на k порядків вищою* , ніж $\beta(x)$.

4. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то говорять, що нескінченно малі в точці x_0 непорівнянні.

Приклад 1. Яка з нескінченно малих $\alpha(x)$ чи $\beta(x)$ має вищий порядок малості?

а) $\alpha(x) = 18tgx - 6\sin x$, $\beta(x) = 3x$ при $x \to 0$;

б) $\alpha(x) = 7\sin x - 6x$, $\beta(x) = x$ при $x \to 0$;

в) $\alpha(x) = x^2 - 6x + 9$, $\beta(x) = 3 - x$ при $x \to 3$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{18tgx - \sin 6x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{18\sin x}{3x\cos x} \frac{-\sin 6x}{3x} \right) = 6\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x\cos x} \right) -$

$-\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{2\sin 6x}{6x} \right) = 6 - 2 = 4$ – $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ мають однаковий порядок малості;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{7\sin x - 6x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{7\sin x}{x} - 6 \right) = 1$ – $\alpha(x)$ **і** $\beta(x)$ *еквівалентні;*

в) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{3 - x} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(3 - x)^2}{3 - x} = \lim\limits_{x \to 3} (3 - x) = 0$ – нескінченно мала $\alpha(x)$ має вищий порядок малості, ніж $\beta(x)$.

Запитання для самоперевірки

1. Яку функція називають нескінченно малою?
2. Які функції називають нескінченно малими одного порядку малості?
3. Які функції називають еквівалентними нескінченно малими?

Навчальні завдання

32. Яка з нескінченно малих $\alpha(x)$ чи $\beta(x)$ має вищий порядок малості?

а) $\alpha(x) = \sin 6x$, $\beta(x) = 2x$ при $x \to 0$; *б)* $\alpha(x) = \sqrt{x+2} + x$, $\beta(x) = x + 1$ при $x \to -1$;

в) $\alpha(x) = x^2 + 2x - 15$, $\beta(x) = x^2 - 9$ при $x \to 3$; *г)* $\alpha(x) = \sin 3x$, $\beta(x) = 8x$ при $x \to 0$;

д) $\alpha(x) = \sqrt{x+1} - 1$, $\beta(x) = x^2$ при $x \to 0$.

§ 4. *Неперервність функції*

Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною* в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

Тобто функція $y = f(x)$ буде неперервною в точці x_0, якщо виконуються такі умови:

а) функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0;

б) границі функції $y = f(x)$ зліва та справа в точці x_0 існують і вони рівні між собою;

в) $\lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o + 0} f(x) = f(x_0)$.

Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною в точці* x_0 *справа (зліва),* якщо

$$\lim_{x \to x_o + 0} f(x) = f(x_0) \qquad \left(\lim_{x \to x_o - 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

Функція $y = f(x)$ *неперервна на проміжку* (*a, b*), якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Функція $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* [*a, b*], якщо вона неперервна на проміжку *(a, b)* і неперервна в точці *x* = *a* справа і в точці *x* = *b* зліва.

Усі елементарні функції неперервні на інтервалах визначеності.

Якщо функції неперервні на деякому інтервалі, то їх сума, різниця, добуток і частка (при умові, що дільник відмінний від нуля) також будуть неперервними функціями.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $u = F(y)$ неперервна в точці y_0, де $y_0 = f(x_0)$, то функція $u = F(f(x))$ буде неперервною в точці x_0.

Приклад 2. При якому значенні λ функція $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8\lambda, & якщо\ x \le 1, \\ \lambda x + 9, & якщо\ x > 1 \end{cases}$ буде неперервна на всій числові прямі.

Розв'язання

Для того, щоб функція була неперервною в точці $x = 1$ необхідно, щоб виконувались три умови неперервності.

а) в точці $x = 1$ функція визначена $f(1) = 1 - 6 + 8\lambda = -5 + 8\lambda$;

б) знайдемо односторонні границі $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 1 - 6 + 8\lambda = -5 + 8\lambda$ та $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lambda + 9$. Ці границі мають бути рівними $-5 + 8\lambda = \lambda + 9 \Rightarrow 7\lambda = 14 \Rightarrow \lambda = 2$.

Отже, при $\lambda = 2$ $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 11$ і $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 11$;

в) Значення функції при цьому також $f(1) = 11$.

Тобто при $\lambda = 2$ функція буде неперервною в точці $x = 1$.

Точку x_0 називають *точкою розриву функції*, якщо функція або не визначена в цій точці, або не є неперервною.

Точку x_0 називають *точкою розриву функції* I *роду*, якщо існують односторонні границі функції у цій точці і вони скінченні.

Якщо точка x_0 є точкою розриву першого роду функції $y = f(x)$, то різницю $\lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x)$ – $\lim\limits_{x \to x_o + 0} f(x)$ називають *стрибком* функції в цій точці.

Якщо x_0 є точкою розриву I роду і $\lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x)$ = $\lim\limits_{x \to x_o + 0} f(x)$, то таку точку називають точкою *усувного розриву*.

Точку x_0 називають *точкою розриву другого роду* функції $y = f(x)$, якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує , або не є скінченою.

Властивості функцій , неперервних на відрізку

1. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на кінцях його набуває значень різних знаків. Тоді на інтервалі $(a; b)$ знайдеться точка *c,* в якій функція перетворюється на нуль.

2. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, причому *f(a)* $\neq$ *f(b)*. Тоді для будь-якого *C*$\in (f(a); f(b))$ на інтервалі $(a; b)$знайдеться принаймні одна точка *c* така, що *f(c)* =*C*.

3. Якщо функція неперервна на відрізку, то вона обмежена на цьому відрізку.

4. Якщо функція неперервна на відрізку, то на цьому відрізку існують точки, в яких функція набуває свого найбільшого і найменшого значення на цьому відрізку.

Зауваження до дослідження точок розриву функції:

1. Елементарна функція може мати розриви тільки в окремих точках, але не може бути розривною в усіх точках деякого інтервалу.

2. Елементарна функція може мати розрив тільки в тій точці де вона не визначена, при умові, що вона буде визначеною хоча б з однієї сторони від цієї точки.

3. Неелементарна функція може мати розриви як в точках де вона не визначена, так і в точках де вона є визначеною, зокрема, якщо функцію задано декількома різними аналітичними виразами для різних інтервалів зміни аргументу, то така функція може мати розриви в точках зміни аналітичних виразів.

Приклад 3. Знайти точки розриву функції та визначити їх характер, у випадку усувного розриву довизначити функцію «по неперервності»:

а) $f(x)=\begin{cases} x, & при \le 1, \\ x+1, & при\ x>1. \end{cases}$; *б)* $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & при\ x<0 \\ x, & при 0 \le x \le 1, \\ \sqrt{x}, & при\ x>1. \end{cases}$; *в)* $f(x)=\frac{x^2-x-6}{x-3}$.

Розв'язання

а) На проміжку $(-\infty;1)$ маємо $f(x)=x$, на проміжку $(1;+\infty)$— іншу залежність: $f(x)=x+1$. Це лінійні функції, тому функція неперервна на проміжках $(-\infty;1)$ і $(1;+\infty)$.

Точка $x_0=1$ є «підозрілою» на розрив, оскільки в ній функція змінює закон визначеності. Знаходимо $\lim\limits_{x\to x_o-0} f(x)$=1; $\lim\limits_{x\to x_o+0} f(x)$=2. Оскільки $\lim\limits_{x\to x_o-0} f(x) \ne \lim\limits_{x\to x_o+0} f(x)$ і скінченні, то функція $f(x)=\begin{cases} x, & при \le 1, \\ x+1, & при\ x>1, \end{cases}$

у точці $x=1$ має розрив I роду.

б) На проміжках $(-\infty;0)$, $[0;1]$ та $(1;+\infty)$ дана функція є елементарною, а отже неперервною. Розглянемо поведінку функції у тих точках. В яких змінюється закон визначеності.

1) $x=0$: $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty$. Так як границя зліва нескінченна, то незалежно від того, якою буде правостороння границя можна сказати, що в точці $x=0$ функція має розрив другого роду.

2) $x=1$: $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0} x=1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}\sqrt{x}=1$. Як бачимо, односторонні границі існують, вони скінченні, рівні між собою та дорівнюють значенню функції у цій точці. Тому функція є неперервною в точці $x=1$.

в) Дана функція є відношенням двох многочленів, отже вона неперервна в усіх точках, крім $x=3$, в які вона невизначена. Знайдемо односторонні границі $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-0}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3-0}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3-0}(x+2)=5$. Аналогічно знаходимо $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3+0}(x+2)=5$. В даній точці функція невизначена, але односторонні границі існують і вони скінченні. Отже в цій точці функція має розрив першого роду. А оскільки односторонні границі рівні між собою, то цей розрив – усувний. Щоб функція стала неперервною в точці $x=3$

потрібно, щоб значення її в цій точці дорівнювало значенню односторонніх границь, тобто $f(3)=5$. Звідси

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}, \text{ при } x\neq 3\\ 5, \quad \text{при } x=3\end{cases}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Яку функція називають неперервною в точці x_0?
2. Сформулюйте умови неперервності функції.
3. Яку функцію називають неперервною на інтервалі $(a;b)$?
4. Що називають точкою розриву I роду? II роду?
5. Що таке усувний розрив?
6. Сформулюйте властивості функцій , неперервних на відрізку

Навчальні завдання

34. Знайти точки розриву для даних функцій та побудувати (схематично) графіки цих функцій.

а) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x-3, & \text{якщо } x\le 3,\\ 2x-4, & \text{якщо } x>3;\end{cases}$; *б)* $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-6, & \text{якщо } x\le 4,\\ 3x-5, & \text{якщо } x>4;\end{cases}$;

в) $f(x)=\begin{cases}x^2+6x-3, & \text{якщо } x\le 5,\\ 7x-2, & \text{якщо } x>5;\end{cases}$; *г)* $f(x)=\begin{cases}x^2+6x-4, & \text{якщо } x\le 6,\\ 3x-2, & \text{якщо } x>6;\end{cases}$;

д) $f(x)=\begin{cases}x^2+5x-7, & \text{якщо } x\le 2,\\ 2x-5, & \text{якщо } x>2;\end{cases}$.

35. Функція $f(x)=\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ невизначена в точці $x=2$. Яким має бути $f(2)$, щоб після до визначення функція стала неперервною в точці $x=2$?

36. Знайти при якому значенню λ функція буде неперервна на всій числовій осі:

а) $f(x)=\begin{cases}x^2+6x+\lambda, & \text{якщо } x\le 7,\\ \lambda x-8, & \text{якщо } x>7;\end{cases}$; *б)* $f(x)=\begin{cases}x^2+7x-3\lambda, & \text{якщо } x\le 5,\\ \lambda x+4, & \text{якщо } x>5;\end{cases}$;

в) $f(x)=\begin{cases}x^2+5x+\lambda, & \text{якщо } x\le 4,\\ \lambda x-5, & \text{якщо } x>4;\end{cases}$; *г)* $f(x)=\begin{cases}x^2+3x-5\lambda, & \text{якщо } x\le 2,\\ \lambda x-3, & \text{якщо } x>2;\end{cases}$;

д) $f(x)=\begin{cases}x^2+6x+\lambda, & \text{якщо } x\le 3,\\ \lambda x+12, & \text{якщо } x>3;\end{cases}$.

37. Знайти такі числа А і В щоб функція $f(x)=\begin{cases} A-4x, & якщо\ x\le -\dfrac{\pi}{4}, \\ tgx, & якщо\ -\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{B}{x}, & якщо\ x\ge \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$ була неперервною. Побудувати її графік.

38. В яких точках функції $f(x)=\dfrac{1}{5x-10}$ та $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ є розривними? Яка різниця в поведінці функцій в цих точках?

39. Знайти точки розриву функції, визначити їх характер, у випадку усувного розриву до визначити функцію "по неперервності":

а) $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$; *б*) $y=\dfrac{5x^2+39x-8}{x+8}$; *в*) $f(x)=\begin{cases} -x-1, & якщо\ x\le -1, \\ 0, & якщо\ -1<x<0, \\ \sqrt{x}, & якщо\ x\ge 0; \end{cases}$

40. Використовуючи властивості неперервних функцій показати, що рівняння $x^5-3x=1$ на проміжку $[1;2]$ має принаймні один корінь.

Розділ 5
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§1. Похідна функції

Нехай функція визначена в деякому околі точки x_0 і x належить цьому околу.

Якщо існує границя відношення $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$, то цю границю називають *похідною* функції $f(x)$ в точці x_0 і позначають $f'(x_0)$.

Величину $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ називають *приростом функції* в точці x_0, а $\Delta x=x-x_0$ – *приростом аргумента* в цій точці. Отже, звідси $x=x_0+\Delta x$. Тому за означенням похідної

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \text{ або } f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $f(x)=x^2$.

Розв'язання.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-(x_0)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0{}^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-x_0{}^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

.

Якщо функція має похідну в точці, то будемо говорити, що вона диференційовна в цій точці.

Основні правила диференціювання

1. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні. Тоді їх сума або різниця також диференційовні і має місце рівність

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x).$$

2. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні. То їх добуток диференційовний і має місце рівність

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x).$$

Наслідок 1. Сталий множник можна виносити за знак похідної.

Наслідок 2. Похідна добутку декількох диференційованих функцій дорівнює сумі добутків похідної кожної з цих функцій на всі функції які входять у добуток.

$$(f(x)\cdot g(x)\cdot \varphi(x))'=f'(x)\cdot g(x)\cdot\varphi(x)+g'(x)\cdot f(x)\cdot\varphi(x)+\varphi'(x)\cdot f(x)\cdot g(x).$$

3. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні, причому $g(x)\neq 0$. Тоді їх частка диференційовна і має місце рівність

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}.$$

4. Похідна постійної величини *с* дорівнює нулю: $(c)' = 0$.

5. Якщо функція $u=\varphi(x)$ має похідну у точці x_0, а функція $y=f(u)$ має похідну у точці $u_0 = u(x_0)$, то складена функція $y=f(u(x))$ також має похідну в точці x_0, причому $y' = f'(u)\cdot u'(x)$.

Геометричний зміст похідної

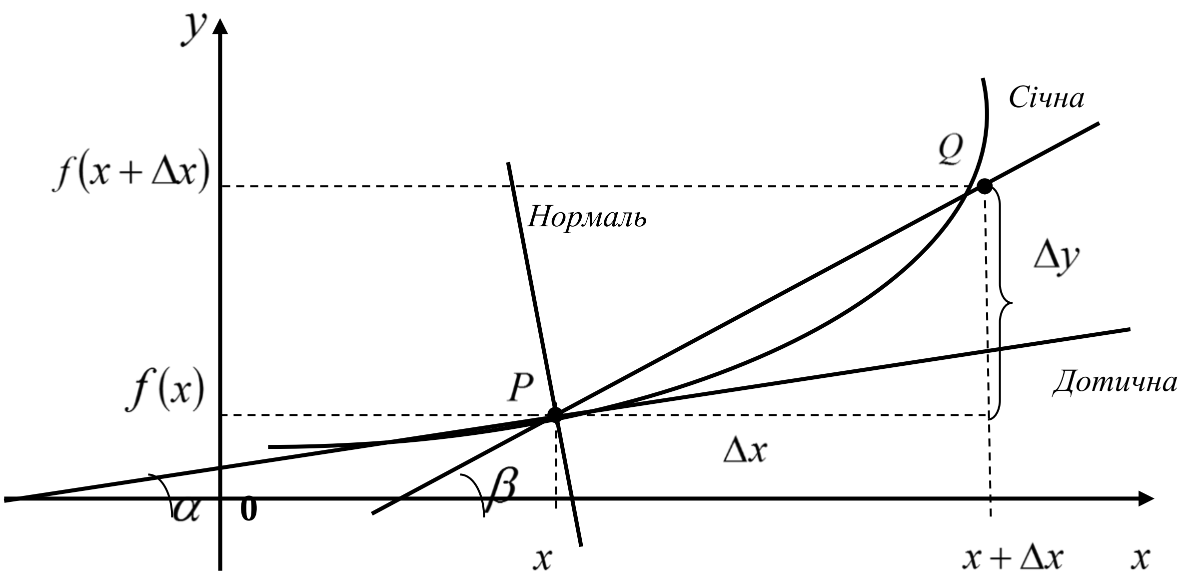


Рис. 5.1

Дотичну до графіка функції в точці P ми отримаємо, як граничне положення січної коли точка Q наближається до точки P. Зрозуміло, що $tg\beta = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Оскільки $tg\alpha$ є границею $tg\beta$.

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0), \text{ тобто } f'(x_0) = tg\alpha,$$

де α - кут нахилу дотичної до вісі *Ох.*

Для отримання рівняння дотичної можна скористатись рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$, $k = tg\alpha$. Оскільки дотична проходить через точку P $(x_0, f(x_0))$ і $k = tg\alpha = f'(x_0)$, то отримаємо

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$ - *рівняння дотичної*.

Нормаллю до кривої в даній точці називають пряму, яка проходить через цю точку і перпендикулярна дотичній.

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ у точці $P(x_0, f(x_0))$ має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Механічний зміст похідної

Якщо точка рухається за законом $S = S(t)$, то миттєва швидкість руху точки у деякий момент часу t є похідною від шляху S за часом t, тобто

$$v = S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Таблиця похідних функцій

Функції	№	Похідна елементарної функції	Похідна складеної функції
Степеневі	1	$(C)' = 0$	–
	2	$(x)' = 1$	–
	3	$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$	$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$
	4	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
Показникові	5	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
	6	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
Логарифмічні	7	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
	8	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
Тригонометричні	9	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
	10	$(cosx)' = -\sin x$	$(cosu)' = -\sin u \cdot u'$
	11	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
	12	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
Обернені тригонометричні	13	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
	14	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
	15	$(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$	$(arctgu)' = \frac{1}{1 + u^2} \cdot u'$

	16	$\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Властивості диференціювання функцій назвемо правилами диференціювання і для зручності також зведемо їх у таблицю.

Правила диференціювання

№	Правило	Приклад
I	Сталий множник можна виносити за знак похідної $\left(C \cdot u\right)' = C \cdot u'$	$\left(4x^{10}\right)' = 4\left(x^{10}\right)' = 4 \cdot 10x^{10-1} = 40x^9$.
II	Похідна суми диференційованих функцій дорівнює сумі їх похідних $\left(u+v\right)' = u' + v'$	$\left(x^3 + 3^x\right)' = \left(x^3\right)' + \left(3^x\right)' = 3x^2 + 3^x \ln 3$.
III	Похідна добутку дорівнює похідній першої функції на другу плюс перша функція на похідну другої $\left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$\left(\sin x \cdot \log_5 x\right)' = \left(\sin x\right)' \cdot \log_5 x + \sin x \cdot \left(\log_5 x\right)' =$ $= \cos x \cdot \log_5 x + \sin x \cdot \dfrac{1}{x \ln 5}$.
IV	Похідна частки дорівнює похідній чисельника помноженій на знаменник мінус похідна знаменника на чисельник і цей вираз ділимо на квадрат знаменника $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$	$\left(\dfrac{\sqrt[5]{x^2}+2}{5-\sqrt[3]{x}}\right)' = \dfrac{\left(\sqrt[5]{x^2}+2\right)' \cdot \left(5-\sqrt[3]{x}\right) - \left(5-\sqrt[3]{x}\right)' \cdot \left(\sqrt[5]{x^2}+2\right)}{\left(5-\sqrt[3]{x}\right)^2} =$ $= \dfrac{\left(\left(x^{\frac{2}{5}}\right)' + (2)'\right)\left(5 - x^{\frac{1}{3}}\right) - \left((5)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)'\right)\left(x^{\frac{2}{5}}+2\right)}{\left(5-\sqrt[3]{x}\right)^2} =$ $= \dfrac{\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}\left(5 - x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{5}}+2\right)}{\left(5-\sqrt[3]{x}\right)^2} = \dfrac{2x^{-\frac{3}{5}} - \frac{2}{5}x^{-\frac{4}{15}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{15}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\left(5-\sqrt[3]{x}\right)^2} =$ $= \dfrac{x^{-\frac{10}{15}}\left(2x^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}x^{\frac{2}{5}} + \frac{2}{3}\right)}{\left(5-\sqrt[3]{x}\right)^2} = \dfrac{30\sqrt[5]{x} - 3\sqrt[5]{x^2} + 10}{15\sqrt[3]{x^2}\left(5-\sqrt[3]{x}\right)^2}$.
V	Похідна складеної функції дорівнює похідні зовнішньої функції помножені на похідну внутрішньої	$\left(\cos^2(3x-1)\right)' = 2\cos(3x-1) \cdot \left(\cos(3x-1)\right)' =$ $= 2\cos(3x-1)\left(-\sin(3x-1)\right) \cdot (3x-1)' = -2\cos(3x-1)\sin(3x-1) \cdot 3 =$ $= -3\sin(6x-2)$

	$y' = f'(u) \cdot u'(x)$	

Приклад 2. Знайти похідні функцій:

а) $y = \frac{x^{15}}{15} + \sqrt[8]{x} - \frac{7}{\sqrt[7]{x^2}}$; б) $y = (5x^4 - 2) \cdot \sin x$; в) $y = \frac{3^x + 4}{\ln x}$.

Розв'язання. Використовуючи правила I та II , формулу 3 та застосувавши формулу переходу від кореня до степеня з дробовим показником $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ отримаємо:

а) $y = \frac{x^{15}}{15} + \sqrt[8]{x} - \frac{7}{\sqrt[7]{x^2}} = \frac{1}{15}x^{15} + x^{\frac{1}{8}} - 7x^{-\frac{2}{7}}$;

$$y' = \left(\frac{1}{15}x^{15} + x^{\frac{1}{8}} - 7x^{-\frac{2}{7}}\right)' = \frac{1}{15} \cdot 15 \cdot x^{14} + \frac{1}{8} \cdot x^{-\frac{7}{8}} - 7 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot x^{-\frac{9}{7}} = x^{14} + \frac{1}{8 \cdot \sqrt[8]{x^7}} + \frac{2}{x \cdot \sqrt[7]{x^2}}.$$

б) $y = (5x^4 - 2) \cdot \sin x$.

Застосувавши правило III отримаємо:

$$y' = (5x^4 - 2)' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot (5x^4 - 2) = 5 \cdot 4x^3 \cdot \sin x + (5x^4 - 2) \cdot \cos x = 20x^3 \cdot \sin x + (5x^4 - 2) \cdot \cos x.$$

в) $y = \frac{3^x + 4}{\ln x}$.

Використовуючи правило IV для диференціювання дробу маємо:

$$y' = \frac{(3^x + 4)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot (3^x + 4)}{(\ln x)^2} = \frac{3^x \ln 3 \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot (3^x + 4)}{(\ln x)^2} = \frac{3^x x \cdot \ln 3 \cdot \ln x - (3^x + 4)}{x(\ln x)^2}.$$

Приклад 3. Знайти похідні складених функцій:

а) $y = arctg \ln x$; б) $y = 3^{\sin x} \cdot \cos x^3$; в) $y = \frac{\ln \cos x}{\ln \sin x}$.

Розв'язання. Скористаємось теоремою 5 про похідну складеної функції, а також відповідними правилами диференціювання.

а) $y' = (arctg \ln x)' = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$;

б) $y' = (3^{\sin x} \cdot \cos x^3)' = (3^{\sin x})' \cdot \cos x^3 + 3^{\sin x} \cdot (\cos x^3)' = 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot (\sin x)' \cdot \cos x^3 +$

$$+ 3^{\sin x} \cdot (-\sin x^3) \cdot (x^3)' = 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot \cos x \cdot \cos x^3 - 3x^2 \cdot 3^{\sin x} \cdot \sin x^3;$$

в) $y' = \left(\frac{\ln \cos x}{\ln \sin x}\right)' = \frac{(\ln \cos x)' \cdot \ln \sin x - (\ln \sin x)' \cdot \ln \cos x}{(\ln \sin x)^2} =$

$$= \frac{\frac{1}{\cos x}(\cos x)' \cdot \ln \sin x - \frac{1}{\sin x}(\sin x)' \cdot \ln \cos x}{(\ln \sin x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x) \cdot \ln \sin x - \frac{1}{\sin x}(\cos x) \cdot \ln \cos x}{(\ln \sin x)^2} = \frac{-tgx \cdot \ln \sin x - ctgx \cdot \ln \cos x}{(\ln \sin x)^2}.$$

Приклад 4. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^3 + 4x^2 - 2$ в точці $x_0 = -1$.

Розв'язання. Рівняння дотичної має вигляд $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, а рівняння нормалі $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$.Отже для його написання ми повинні знайти значення функції та її похідної в указаній точці.

$$f(x_0) = f(-1) = (-1)^3 + 4(-1)^2 - 2 = -1 + 4 - 2 = 1;$$

$$f'(x) = \left(x^3 + 4x^2 - 2\right)' = 3x^2 + 4 \cdot 2x = 3x^2 + 8x; \quad f'(x_0) = f'(-1) = 3(-1)^2 + 8(-1) = 3 - 5 = -2.$$

Тоді рівняння дотичної матиме вигляд $y = 1 - 2(x + 1)$ або $y = -2x - 1$.

Знаходимо рівняння нормалі: $y = 1 + \frac{1}{2}(x + 1)$ або $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.

Приклад 5. Тіло рухається за законом $S(t) = \frac{1}{6}t^{12} + 4t^2 - t(м)$. Знайти швидкість та прискорення тіла через 1 секунду після початку руху.

Розв'язання. Швидкість руху точки дорівнює похідній від шляху:

$$v(t) = S'(t) = \left(\frac{1}{6}t^{12} + 4t^2 - t\right)' = \frac{1}{6} \cdot 12t^{11} + 4 \cdot 2t - 1 = 2t^{11} + 8t - 1,$$

$$v(1) = 2 \cdot 1^{11} + 8 \cdot 1 - 1 = 2 + 8 - 1 = 9 \left(м/с\right).$$

Прискорення руху точки дорівнює похідній від швидкості:

$$a(t) = v'(t) = \left(2t^{11} + 8t - 1\right)' = 2 \cdot 11t^{10} + 8 \cdot 1 - 0 = 22t^{10} + 8,$$

$$a(1) = 22 \cdot 1^{10} + 8 = 22 + 8 = 30 \left(м/с^2\right).$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називають похідною функції у точці x_0?
2. Як ви розумієте приріст функції у точці x_0?
3. В чому полягає геометричний зміст похідної?

4. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції *y=f(x)*, проведених в точці x_0.
5. В чому полягає механічний зміст похідної?
6. Сформулюйте теореми про похідну.
7. Вивчіть похідні елементарних функцій.
8. Яку функцію називають складеною?
9. Сформулювати теорему про похідну складеної функції.

Навчальні завдання

1. Знайти похідні функцій:

а) $y = x^2 + 3\cos x - 4$; *б*) $y = -5x + 7^x - 9$; *в*) $y = x^{11} + 3\arcsin x - 59$;

г) $y = 3 - 2x^4 + tgx$; *д*) $y = 24x^2 + e^x - 8$; *е*) $y = \log_4 x - 17 + 12x^5$;

є) $y = 4\sqrt{x} + \sin x - 16$; *ж*) $y = 9 + 18x^{\frac{1}{3}} + \arcsin x$; *з*) $y = x^2 \sin x$;

и) $y = tgx \ln x$; *і*) $y = 6^x\ arctgx$; *ї*) $y = 5^x\left(x^5 - 10x\right)$;

й) $y = (ctgx - 1)\sqrt[9]{x^7}$; *к*) $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x + 5}$; *л*) $y = \dfrac{9x^2}{\ln x}$;

м) $y = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$; *н*) $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ *к*) $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 - 4x + 3}$.

2. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$ в точці x_0:

а) $y = x^2 + 4x - 2$, якщо x_0 = 1; *б*) $y = \dfrac{1 - x}{x + 4}$, якщо x_0= -3;

в) $y = x^3 + \sqrt{x}$, якщо x_0 = 4; *г*) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$, якщо x_0 = 0;

д) $y = \dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{1}{x}$, якщо x_0 = 1; *е*) $y = 2x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$, якщо x_0 = 3.

3. Тіло рухається за законом *S* (*t)*. Знайти швидкість та прискорення тіла через *t* секунд після початку руху. (S вимірюється в метрах).

а) $S(t) = \dfrac{2}{3}t^3 + 7t + 4$, якщо *t* = 2 с; *б*) $S(t) = 2t^3 - \dfrac{5t^2}{2} + 3t + 1$, якщо *t* = 1 с;

в) $S(t) = \dfrac{1}{2}t^4 - 1{,}5t^2 + 2$, якщо *t* = 2 с; *г*) $S(t) = 2t^3 - \dfrac{5t^2}{2} + 3t + 1$, якщо *t* = 1 с .

4. Знайти похідну складеної функції:

а) $y = \sin^4\left(5x^3 - 5x\right)$; *б*) $y = tg\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$; *в*) $y = ctg^3\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$;

г) $y=\ln\cos 5^{8x}$; д) $y=\ln\sin\left(2^{x^2}\right)$; е) $y=\ln\left(\sin\left(\ln^2\sin x\right)\right)$;

є) $y=\arcsin\left(\ln^9\left(\cos 3x\right)\right)$; ж) $y=6^{\sin^6\left(\log_6\left(12x+5\right)\right)}$; з) $y=\sqrt[3]{ctg^2\left(\sin^5\left(2x-1\right)\right)}$.

§2. *Похідні вищих порядків*

2.1. Похідні вищих порядків явно заданої функції

Нехай функція $y=f\left(x\right)$ диференційовна на інтервалі $(a;b)$, причому її похідна $y'=f'(x)$ також є диференційованою функцією на цьому інтервалі. Тоді похідну функції $f'(x)$ називають *похідною другого порядку* функції $y=f\left(x\right)$ і позначають $f''(x)$.Якщо функція $f''(x)$також диференційована на інтервалі $(a;b)$, то її називають *похідною третього порядку* функції $y=f\left(x\right)$ і позначають $f'''(x)$.

Аналогічно, *похідною n-го порядку* функції $y=f\left(x\right)$називають похідну функції $f^{(n-1)}(x)$, якщо вона існує і диференційована.

2.2. Механічний зміст другої похідної

Розглянемо функцію $S=\dfrac{gt^2}{2}$, тоді $S'=gt$, а $S''=g$, де g- прискорення. Цей результат невипадковий, адже друга похідна від закону руху по часу є прискоренням.

Приклад 1. Знайти похідну *n*-го порядку для функції $y=5x^3-2x^2+54$.

Розв'язання. Шукатимемо послідовно похідні від першого поядку:

$$y'=15x^2-4x;\quad y''=\left(15x^2-4x\right)'=30x-4;\quad y'''=\left(30x-4\right)'=30;\quad y^{(4)}=\left(30\right)'=0.$$

Починаючи з похідної п'ятого порядку всі похідні наступних порядків дорівнюють 0, отже $y^{(n)}=0$ при $n\geq 5$.

2.3. Похідні неявно заданих функцій

Розглянемо диференціювання функції заданої рівнянням $F(x;y)=0$. Для знаходження похідної функції, заданої неявно, достатньо продиференціювати обидві частини рівності, розглядаючи y як функцію від x, а потім з одержаної рівності виразити y'.

Приклад 2. Знайти похідну функції $5xy+e^{xy}=64$.

Розв’язання. Продиференціюємо обидві частини даної рівності $\left(5xy+e^{xy}\right)'=64'\Rightarrow 5x'\cdot y+5x\cdot y'+e^{xy}\left(x'\cdot y+x\cdot y'\right)=0\Rightarrow 5y+5xy'+e^{xy}y+e^{xy}xy'=0$. Знайдемо чому дорівнює y':

$$y'\left(5x+xe^{xy}\right)=-5y-ye^{xy}\Rightarrow y'=-\frac{5y+ye^{xy}}{5x+xe^{xy}}.$$

2.4. Логарифмічне диференціювання

Логарифмічне диференціювання доцільно застосовувати при диференціюванні добутку декількох функцій, дробів, коренів з дробів, виразів виду x^y**.** Спочатку такий вираз логарифмують, а тільки потім диференціюють як неявно задану функцію.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y=x^{\cos x}$.

Розв'язання. Продиференціюємо обидві частини цієї рівності:

$$(\ln y)'=(\cos x\cdot\ln x)';\ \frac{1}{y}y'=(\cos x)'\cdot\ln x+\cos x\cdot(\ln x)'\Rightarrow$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=-\sin x\cdot\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}.$$

Знайдемо звідси y' помноживши обидві частини рівності на y

$$y'=y\left(-\sin x\cdot\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}\right)\Rightarrow y'=x^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\cdot\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}\right).$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називають похідною другого порядку?
2. В чому полягає механічний зміст другої похідної?
3. Яку функцію називають неявно заданою? Як її продеференціювати?
4. В яких випадках застосовують логарифмічне диференціювання?

Навчальні завдання

5. Перевірити, чи задовольняє функція *y=f(x)* дане рівняння:

а) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}$; $y''-5y'+6y=0$;

б) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$; $y''+y=0$;

в) $y=x^2\ln x$; $xy''-y'=2x$;

г) $y=e^x\sin 2x$; $y''-2y'+5y=0$;

д) $y=\cos e^{x}+\sin e^{x}$; $y''-y'+ye^{2x}=0$.

6. Знайти похідну $n^{го}$ порядку для функції

а) $y=e^{ax}$; *б)* $y=5^{x}$; *в)* $y=6\ln x$; *г)* $y=2^{x}+2^{-x}$; *д)* $y=\dfrac{1}{x-6}$.

7. Знайти похідні неявно заданих функцій:

а) $\ln y+xy-5=0$; *б)* $x^{2}+y^{2}-xy=0$; *в)* $tgy-xy^{2}=0$;

г) $x\sin y+y\sin x=1$; *д)* $e^{x}+e^{y}-2^{y}-1=0$.

8. Знайти похідну функції за допомогою логарифмічного диференціювання:

а) $y=x^{8x}$; *б)* $y=(\ln x)^{x}$; *в)* $y=(\sqrt[4]{x})^{\cos 4x}$;

г) $y=\left(x^{2}-1\right)^{\frac{1}{x}}$; *д)* $y=\dfrac{\sqrt[3]{6x-1}\sqrt{2x+1}}{\sqrt[5]{15x-4}}$.

9. Сила струму I змінюється залежно від часу *t* за законом I = 0,4t^2 (I – в амперах, *t* – у секундах). Знайдіть швидкість зміни струму наприкінці восьмої секунди.

10. Знайдіть силу *F,* яка діє на тіло масою *m,* що рухається прямолінійно за законом $x(t)=2t^3-t^2$, при $t=2$.

11. Закон руху точки визначається формулою $x(t)$=3cos2t. При яких *t* прискорення точки додатне?

12. Тіло масою 10кг рухається прямолінійно за законом $s(t)=3t^{2}+t+4$. Знайти кінетичну енергію тіла (0,5mv^2) через 3с після початку руху.

13. Маса тонкого стержня АВ, довжина якого 30 см, у будь–якій точці С, що лежить на відстані *x* від точки А*,* визначається за формулою $m(x)=5x^2-3x$*.* Знайдіть лінійну густину стержня в точці *x* = 12 см і в точці В, якщо маса вимірюється в грамах.

14. Колінчастий вал за *t* секунд обертається на кут $\varphi(t)=12+40t-2t^2$(рад). Визначте кутову швидкість у будь–який момент.

15. Температура тіла змінюється за законом Т= 0,2t^2*.* З якою швидкістю нагрівається тіло в момент часу t=10 с?

16. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t)=\dfrac{t^{3}}{3}-2t^{2}+3t$, де *x*– відстань у метрах, *t* – час у секундах. В які моменти часу точка міняє напрям руху?

§3. Диференціал функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка визначена в деякому околі точки x_0. Нехай приріст Δx буде таким, що точка $x_0 + \Delta x$ належить цьому околу.

Розглянемо приріст функції, який відповідає приросту аргументу Δx

$$\Delta y(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{1}$$

Функцію $y = f(x)$ називають *диференційовною* в точці x_0, якщо приріст цієї функції (1) можна представити у вигляді:

$$\Delta y(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{2}$$

де A – стала величина, яка не залежить від Δx і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Стала A не залежить від Δx, але залежить від точки x_0.

Функція $y = f(x)$ буде диференційовною в точці x_0, тоді і тільки тоді, коли в цій точці існує скінчена похідна.

Якщо функція диференційовна в точці, то вона неперервна в цій точці.

Зауваження. Із неперервності функції ще не слідує її диференційованість.

Якщо функція диференційована в точці x_0, то для неї має місце представлення (2). Обидва доданки правої частини цього представлення будуть нескінченно малими відносно Δx, але другий доданок є нескінченно малим більш високого порядку, ніж перший. Тому перший доданок називають *головною частиною приросту* функції.

Головну лінійну відносно Δx частину приросту диференційовної функції називають *диференціалом функції.*

Позначають: dy, df.

Таким чином за означенням маємо: $d(y) = A \cdot \Delta x$. Введемо позначення $\Delta x = dx$, тоді, раховуючи, що $A = f'(x_0)$, будемо мати

$$dy = y'(x_0)dx. \tag{3}$$

Величину dx називають *диференціалом* аргумента.

З формули (3) можна отримати:

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Тобто похідна є відношенням диференціала функції до диференціала аргументу.

Властивості диференціалів

1. $d(C\,u) = C\,d(u)$;
2. $d(u+v) = du + dv$;
3. $d(uv) = udv + vdu$;

4. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$.

Приклад 4. Знайти диференціали функцій

а) $y=\sin x$; б) $y=x^2$; в) $y=e^x$.

Розв'язання. Скористаємось формулою 3 *:*

а) $d(\sin x)=\cos x dx$; б) $d(x^2)=2xdx$; в) $d(e^u)=e^u du$.

Приклад 5. Визначити диференціал 2-го порядку від функції $y=e^x$.

Розв'язання. Диференціал 2-го порядку можна знайти за формулою

$$d^2y=y''\cdot d^2x,$$

отже, $y'=e^x$, $y''=e^x$. $d^2y=e^x d^2x$.

Застосування диференціала для наближених обчислень

Виходячи з означення диференціала та його геометричного змісту можна зробити висновок, що $\Delta y=dy+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, тобто приріст функції Δy відрізняється від її диференціала на нескінченну малу величину більш високого порядку ніж $dy=f'(x)\Delta x.$ Тому при достатньо малих значеннях Δx $\Delta y\approx dy$ або $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$ звідки

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

Приклад 6. Обчислити:

а) $\sqrt[4]{17}$; *б)* $tg46^0$

Розв'язання. *а)* $\sqrt[4]{17}$ – це частинний випадок для функції $y=\sqrt[4]{x}$; якщо $x=17$.

Так як 17 = 16 + 1, то $x=x_0+\Delta x$, де $x_0=16$, $\Delta x=1$. Оскільки $\Delta y\approx dy$, то $y-y_0\approx y'(x_0)\Delta x$, звідси $y\approx y_0+y'(x_0)\Delta x$

$$y'(x)=\left(\sqrt[4]{x}\right)'=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}};\quad y'(x_0)=y'(16)=\frac{1}{4}16^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{32};\ y_0=\sqrt[4]{16}=2;\ y\approx 2+\frac{1}{32}\cdot 1=2{,}031.$$

б) tg 46⁰ . Нехай $f(x)=tgx\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $tg(x+\Delta x)\approx tgx+\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$

$$tg46^0=tg(45^0+1^0)=tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)\approx tg\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\pi}{180}=1+\frac{\pi}{90}=1+0{,}0349\approx 1{,}035$$

Запитання для самоперевірки

1. Яку функцію називають диференційовною в точці x_0?
2. Сформулюйте необхідну і достатню умову диференційовності функції в точці.
3. Що називають диференціалом функції?
4. За якою формулою можна знайти наближене значення функції?
5. Сформулюйте властивості диференціалів.
6. Як застосовують диференціал для наближених обчислень?

Навчальні завдання

17. Знайти диференціал функції:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 6$; *б)* $y = 7^{x^2+2x}$; *в)* $y = xe^{-x}$;

г) $y = e^{-x} \sin x$; *д)* $y = 5\sin(4x-7) - 9\cos(4x-7)$.

18. Знайти наближені значення заданої функції.

а) $y = \sin x;$ $x = 31^0$; *б)* $y = \sqrt{x};$ $x = 4{,}000012;$

в) $y = arctqx;$ $x = 1{,}02;$ *г)* $y = e^{1-x^2}$; $x = 1{,}05;$

д) $y = \sqrt[3]{x};$ $x = 7{,}98$.

§ 4. Правила Лопіталя

Границя відношення двох нескінченно малих (нескінченно великих) функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо така границя існує

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Зауваження1. Якщо відношення похідних також являє собою невизначеність типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, то можна знову і знову застосовувати правило Лопіталя, якщо це кориссно, до отримання остаточного результату.

Зауваження 2. Невизначеність типу $0 \cdot \infty$ може бути приведена до типів $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ за допомогою перетворення $f(x) \cdot q(x) = \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{q(x)}}$;

Зауваження 3. Невизначеність типу $1^{\infty};\infty^{0};0^{0}$, може бути приведена до типу $0\cdot\infty$ за допомогою перетворення $\left(f(x)\right)^{q(x)}=e^{q(x)\cdot\ln f(x)}$;

Зауваження 4. Правило Лопіталя дає тільки достатню, але не необхідну умову існування границі. Границя відношення похідних може і не існувати, в той час як границя відношення функцій існує.

Правила Лопіталя можна використовувати і при $x\to+\infty,\quad x\to-\infty$.

Приклад 6. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\frac{2x^2-7x-15}{3x^2-16x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x+5}{2x-100}$

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin' x}{x'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{1}=1$;

б) $\lim\limits_{x\to5}\frac{2x^2-7x-15}{3x^2-16x+5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to5}\frac{(2x^2-7x-15)'}{(3x^2-16x+5)'}=\lim\limits_{x\to5}\frac{4x-7}{6x-16}=\frac{13}{14}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x+5}{2x-100}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(7x+5)'}{(2x-100)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{2}=\frac{7}{2}$.

Приклад 7. Обчислити границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x^2-6x}{2x^2-4x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-3x}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x^2-6x}{2x^2-4x+9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x^3+5x^2-6x)'}{(2x^2-4x+9)'}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+10x}{4x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{(9x^2+10x)'}{(4x-4)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{18x+10}{4}=\infty.$$

б) В даному прикладі маємо невизначеність виду 1^{∞}.

Нехай $y=\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-3x}$, прологарифмуємо цю функцію

$$\ln y=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-3x},\quad \ln y=-3x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x}\right),\quad \ln y=\frac{-3\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^{-1}}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{-3\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^{-1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-3\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)'}{\left(x^{-1}\right)'}=-3\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)'}{-1\cdot x^{-2}}=$$

$$-3\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+2}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{x^{-2}}=-3\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x+2}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)=6\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+2}=6\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}=$$

$$= 6\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}} = 6.$$

Таким чином $\ln y = 6$, отже, $y = e^6$. Тоді шукана границя дорівнюватиме

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-3x} = e^6.$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулювати правила Лопіталя.
2. Якого типу невизначеності можна розкривати за допомогою правил Лопіталя?

Навчальні завдання

19. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2+3x-18}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-15}{x^2+3x-18}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x}{tgx}$; *д)* $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}+x}{x+1}$; *е)* $\lim\limits_{x\to 0}(1+8x)^{\frac{4}{x}}$;

є) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{6x+4}$; *ж)* $\lim\limits_{x\to -2}\frac{-3x^2+2x+16}{6x^2+12x}$; *з)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2+5x-13}{-4x^2-x+5}$;

и) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2+7x-15}{6x^2+30x}$; *і)* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$; *ї)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tg6x}$;

й) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tgx}$; *к)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\arcsin 9x}$; *л)* $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{11x}}$;

§ 6. Застосування диференціального числення для дослідження функції

6.1. Монотонність і екстремуми функції

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0.

Якщо існує окіл $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, $\delta>0$ точки x_0 в якому для всіх $x\in(x_0-\delta;\ x_0)$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$, а для всіх $x\in(x_0;\ x_0+\delta)$ виконується нерівність $f(x)>f(x_0)$, то говорять, що *функція зростає* у точці x_0.

Якщо існує окіл $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, $\delta>0$ точки x_0 в якому для всіх $x\in(x_0-\delta;\ x_0)$ виконується нерівність $f(x)> f(x_0)$, а для всіх $x\in(x_0;\ x_0+\delta)$ виконується нерівність $f(x)< f(x_0)$, то говорять, що *функція спадає* у точці x_0.

Якщо існує окіл ($x_o - \delta; x_o + \delta$), $\delta>0$ точки x_o в якому для всіх x, крім $x=x_o$, виконується нерівність $f(x) < f(x_o)$, то точку x_o називають *точкою локального максимуму*, а саме значення функції в цій точці *максимумом* функції.

Якщо існує окіл ($x_o - \delta; x_o + \delta$), $\delta>0$ точки x_o в якому для всіх x, крім $x=x_o$, виконується нерівність $f(x) > f(x_o)$, то точку x_o називають *точкою локального мінімуму*, а саме значення функції в цій точці *мінімумом* функції.

Точки локального максимуму і мінімуму називаються *точками екстремуму*, а значення функції в цих точках *екстремумами* функції.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_o і $f'(x_0)>0$ ($f'(x_0) < 0$), то функція буде зростати (спадати) в точці x_o .

Необхідна умова існування. Нехай точка x_o є точкою екстремуму для функції

$y = f(x)$, причому в цій точці функція диференційована. Тоді $f'(x_0) = 0$.

Точки із області визначення функції, в яких похідна функції дорівнює нулю називають *стаціонарними*.

Стаціонарні точки із області визначення функції та точки в яких похідна функції не існує називають *критичними*.

Перша достатня умова існування точок екстремуму Нехай точка x_o є критичною точкою для функції $y = f(x)$, причому функція $y=f(x)$ неперервна і диференційовна в деякому околі цієї точки, крім можливо самої точки x_o. Тоді:

1) якщо існує такий окіл ($x_o - \delta; x_o + \delta$), $\delta>0$ точки x_o, в якому для всіх

$x \in$ ($x_o - \delta; x_o$), має місце нерівність $f'(x) < 0$, а при $x \in (x_o; x_o + \delta)$ – $f'(x) > 0$, то точка x_o є точкою мінімуму;

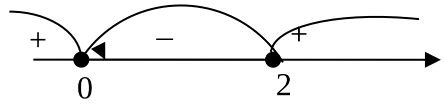
2) якщо існує такий окіл ($x_o - \delta; x_o + \delta$), $\delta>0$ точки x_o, в якому для всіх

$x \in$ ($x_o - \delta; x_o$), має місце нерівність $f'(x) > 0$, а при $x \in (x_o; x_o + \delta)$ – $f'(x) < 0$, то точка x_o є точкою максимуму.

3) якщо існує такий окіл ($x_o - \delta; x_o + \delta$), $\delta>0$ точки x_o, в якому зліва і справа відносно точки x_o похідна має один і той же знак, то точка x_o не є точкою екстремуму.

Приклад 1. Для функції $y=x^3-3x^2$ знайти проміжки монотонності, точки екстремуму та значення функції в точках екстремуму.

Схема		*Розв'язання*
Досліджувати функцію на монотонність та екстремум можна за наступною схемою:		
1.	Знаходимо область визначення функції	$D(y) = R$

2.	Знаходимо похідну	$y' = 3x^2 - 6$
3.	Знаходимо критичні точки (це ті точки із області визначення у яких похідна дорівнює 0, або не існує)	$y' = 0,$ отже $3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0$ звідси $x_1 = 0, x_2 = 2$ – критичні точки.
4.	Позначаємо критичні точки на області визначення, визначаємо знак похідної на кожному проміжку і робимо висновки про поведінку функції на кожному проміжку (там де похідна додатна функція зростає, від'ємна – спадає).	 Отже функція зростає на проміжках $(-\infty;0)$ і $(2;+\infty)$, а спадає на проміжку $(0;2)$.
5.	Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою екстремуму і якщо так, то що це за екстремум (якщо при переході через критичну точку похідна змінює знак з «+» на «-», то це точка максимуму, якщо з «-» на «+» – то мінімуму. Якщо ж при переході через критичну точку похідна не змінює свій знак, то ця точка не являється точкою екстремуму).	У точці 0 похідна змінює знак з «+» на «-»,отже це точка максимуму; у точці 2 похідна змінює знак з «–» на «+»,отже це точка мінімуму $x_{\max} = 0$; $x_{\min} = 2$.
6.	Обчислюємо значення функції у точках екстремуму, знаходячи тим самим екстремуми функції.	$y_{\max} = y(0) = 0$; $y_{\min} = y(2) = -4$.

6.2. Опуклість графіка функції. Точки перегину

Графік функції має на інтервалі $(a;b)$ *опуклість направлену донизу (доверху)*, якщо в межах цього інтервалу відповідні точки графіка функції лежить не нижче (не вище) будь-якої дотичної, проведеної до графіка функції в межах цього інтервалу .

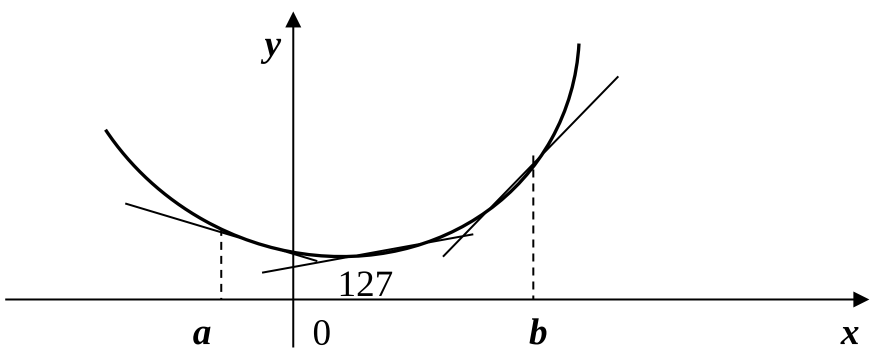


Рис. 5.2

Якщо друга похідна функції $y=f(x)$ є неперервною і недодатньою (невід′ємною) на деякому інтервалі $(a;b)$, то на цьому інтервалі графік функції має опуклість направлену доверху (донизу).

Точку $M_o(x_o\ y_o)$, яка належить на графіку функції називають *точкою перегину* графіка, якщо на осі *Ox* існує такий окіл точки x_o, в якому зліва і справа відносно цієї точки графік функції має різні напрями опуклості.

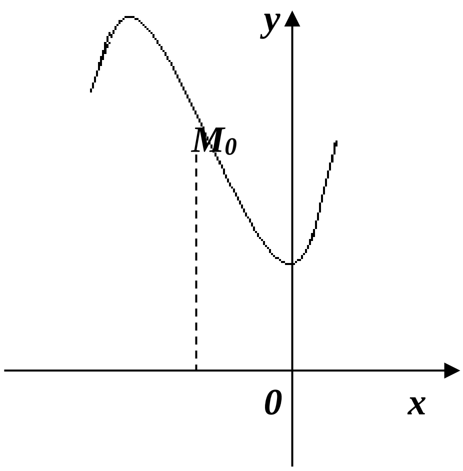


Рис. 5.3

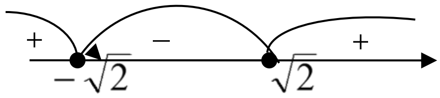
Необхідна умова існування точок перегину. Нехай точка $M_o(x_o;f(x_o))$, є точкою перегину графіка функції і в точці x_o функція має другу похідну. Тоді $f''(x_o)=0$.

Перша достатня умова існування точок перегину. Нехай функція $y=f(x)$ буде мати в околі точки x_o другу неперервну похідну, причому $f''(x_o)=0$. Тоді, якщо в межах цього околу друга похідна відносно точки x_o зліва і справа має різні знаки, то точка $M_o(x_o; f(x_o))$ буде очкою перегину графіка функції.

Зауваження. У випадку існування точок розриву їх обов′язково потрібно вказувати на числовій прямій, як при дослідженні функції на монотонність так і на опуклість графіка функції.

Приклад 2. Знайти проміжки опуклості та точки перегину графіка функції $y=x^4-12x^2+3x-22$.

<table>
<tr><td>Коментар</td><td>Розв’язання</td></tr>
<tr><td colspan="2">Досліджувати функцію на опуклість та вгнутість і точки перегину можна за наступною схемою:</td></tr>
</table>

1.	Знаходимо область визначення функції	$D(y)=R$
2.	Знаходимо похідну другого порядку	$y'=4x^3-24x+3$; $y''=12x^2-24$.
3.	Знаходимо ті точки із області визначення у яких похідна другого порядку дорівнює 0.	$y''=0$, тобто $12x^2-24=0$, звідси $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}$ $y''=12\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$
4.	Позначаємо ці точки на області визначення, визначаємо знак похідної другого порядку на кожному проміжку і робимо висновки про поведінку графіка функції на цих проміжках (там де похідна другого порядку додатна графік функції має опуклість направлену донизу, від'ємна – догори).	 Отже графік функції має опуклість направлену донизу, якщо $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ і $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$, а догори на проміжку $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.
5.	Відносно кожної точки, в якій похідна другого порядку дорівнює 0 визначити, чи є вона точкою перегину (якщо при переході через цю точку похідна другого порядку змінює знак, то це точка перегину).	При переході через точки $x_1=-\sqrt{2}$ і $x_2=\sqrt{2}$ похідна другого порядку змінює свій знак, отже це точки перегину.
6.	Обчислюємо значення функції у точках перегину, знаходячи їх ординати.	$y\left(-\sqrt{2}\right)=\left(-\sqrt{2}\right)^4-12\left(-\sqrt{2}\right)^2+3\left(-\sqrt{2}\right)-22=$ $=4-24-3\sqrt{2}-22=-42-3\sqrt{2}$; $y\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^4-12\left(\sqrt{2}\right)^2+3\left(\sqrt{2}\right)-22=$ $=4-24+3\sqrt{2}-22=-42+3\sqrt{2}$, звідси точки $A\left(-\sqrt{2};-42-3\sqrt{2}\right)$ та $B\left(\sqrt{2};-42+3\sqrt{2}\right)$ є точками перегину графіка функції.

6.3. Асимптоти до графіка функції

Пряму лінію називають *асимптотою* кривої *y = f(x),* якщо відстань точки $M(x, f(x))$ кривої від цієї прямої прямує до нуля при віддаленні точки *M* в нескінченність (рис.5.3).

Асимптоти можуть бути *вертикальними, похилими та горизонтальними.*

Якщо принаймні одна із односторонніх границь $\lim\limits_{x \to c-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to c+0} f(x)$ є нескінченною, то пряму *x=c* називають *вертикальною асимптотою до графіка функції.*

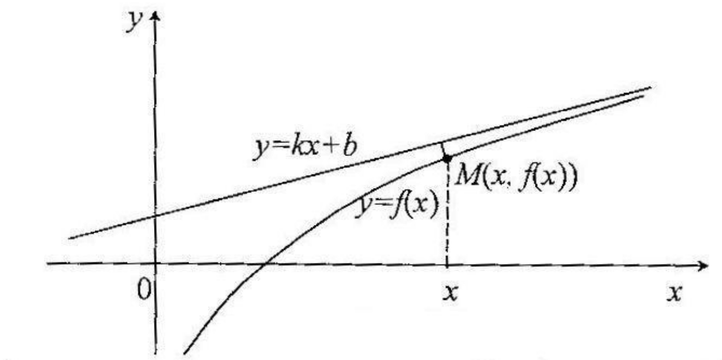


Рис.5.3

Приклад 3. Чи має вертикальні асимптоти функція $y = \dfrac{1}{x-2}$.

Розв'язання. *x*=2 – точка розриву.

$\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$, тому *x*=2 – вертикальна асимптота до графіка функції.

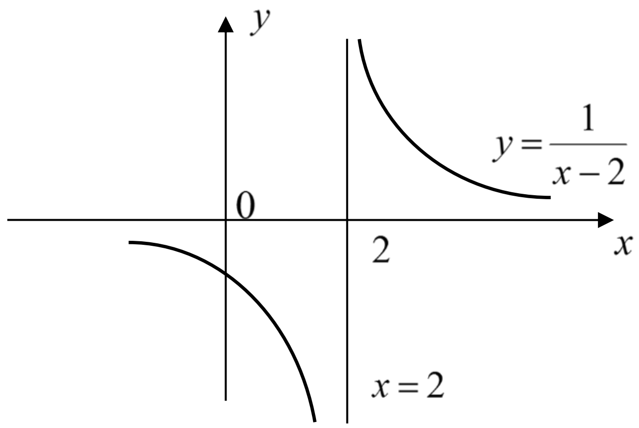


Рис. 5.4

Пряму $y=kx+b$ називають *похилою асимптотою до графіка функції* $y=f(x)$ при $x \to \infty$, якщо має місце представлення $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, де $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

Пряма $y=kx+b$ буде похилою асимптотою до графіка функції $y=f(x)$, тоді і тільки тоді, коли існують і скінченні дві границі

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{і} \quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Приклад 4. Знайти рівняння асимптот до графіка функції: $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Розв'язання. Точка x=2 – точка розриву.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2}{x-2}=\left|\begin{array}{l} x\to 2-0 \\ x<2 \\ x-2\to 0- \\ \dfrac{x^2}{x-2}\to -\infty \end{array}\right|=-\infty; \quad \lim_{x\to 2+0}\frac{x^2}{x-2}=\left|\begin{array}{l} x\to 2+0 \\ x>2 \\ x-2\to 0+ \\ \dfrac{x^2}{x-2}\to +\infty \end{array}\right|=+\infty.$$

Пряма x=2 – вертикальна асимптота.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2+2x}{x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x-2}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=2.$$

Тому пряма $y=x+2$ є похилою асимптотою графіка функції.

6.4. Загальна схема дослідження функції

Перший етап (використовується вид заданої функції)

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Досліджуємо функцію на парність, непарність, періодичність.
3. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат та значення функції на кінцях відрізку, якщо область визначення функції є замкнений відрізок.
4. Досліджуємо функцію на неперервність. Якщо є точки розриву, то встановлюємо їх характер. Вказуємо вертикальні асимптоти (у випадку їх існування).
5. Знаходимо похилі асимптоти графіка функції.

Другий етап (використовується похідна функції)

6. Знаходимо критичні точки, інтервали зростання та спадання, точки екстремумів та екстремуми функції.

Третій етап (використовується друга похідна)

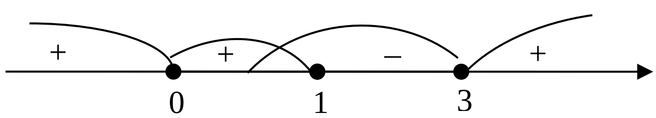
7.Знаходимо точки, в яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, інтервали опуклості графіка функції, точки перегину та значення функції в точках перегину.

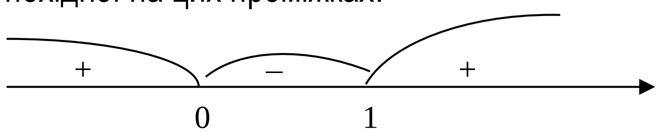
Четвертий етап

8.В системі координат будуємо точки, отримані в результаті досліджень, асимптоти, екстремуми, точки перегину. Будуємо графік функції з урахуванням періодичності, парності чи непарності функції та інтервалів неперервності, монотонності, опуклості.

Приклад 5. Дослідити функцію $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

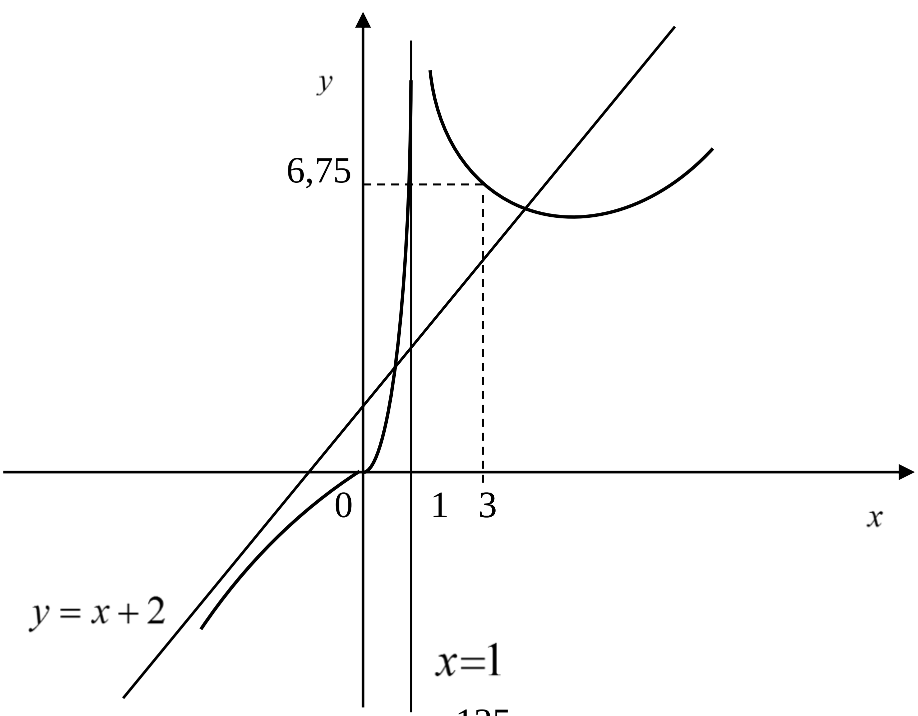
Схема		*Розв'язання*
	Знаходимо область визначення функції (ті точки в яких можна обчислити значення функції)	$D=(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ В точці $x=0$ знаменник перетворюється в 0.
	З'ясовуємо, парною чи непарною є дана функція (для парної має виконуватись рівність $f(-x)=f(x)$, для непарної $f(-x)=-f(x)$.	$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x-1)^2}=-\frac{x^3}{(x+1)^2}$. Оскільки $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq -f(x)$, то функцію ні парна ні непарна, тобто функція загального вигляду.
	Знаходимо точки перетину з осями координат.	Якщо $x=0$ то $y=\frac{0^3}{(0-1)^2}=0$. Тобто маємо точку $O(0;0)$. Якщо $y=0$ то $\frac{x^3}{(x-1)^2}=0$; $x^3=0$ і $x\neq 1$; $x=0$. Тобто маємо ту ж точку $O(0;0)$.
	Знаходимо точки підозрілі на розрив та обчислюємо односторонні границі функції в цих точках.	Так як в точці $x=1$ $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ невизначена, то в ній функція терпить розрив.

		Оскільки $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\left\lvert\begin{array}{l} x\to 1-0 \\ x<1 \\ x-1\to 0- \\ (x-1)^2\to 0+ \\ \frac{x^3}{(x-1)^2}\to+\infty \end{array}\right\rvert=+\infty$ і $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\left\lvert\begin{array}{l} x\to 1+0 \\ x>1 \\ x-1\to 0+ \\ (x-1)^2\to 0+ \\ \frac{x^3}{(x-1)^2}\to+\infty \end{array}\right\rvert=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$, то $x=1$ є точкою розриву другого роду. Пряма $x=1$ – вертикальна асимптота.
	а) Знаходимо критичні точки функції (це ті точки із області визначення у яких похідна дорівнює 0, або не існує)	а) Знаходимо похідну даної функції: $y'=\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(x^3)'(x-1)^2-((x-1)^2)'\cdot x^3}{(x-1)^4}=$ $=\frac{3x^2(x-1)^2-2x^3(x-1)}{(x-1)^4}==\frac{x^2(x-1)(3x-3-2x)}{(x-1)^4}=$ $=\frac{x^2(x-1)(2x-3)}{(x-1)^4}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$. Знаходимо критичні точки: $\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=0$; $x^2(x-3)=0$ і $x\neq 1$; $x_1=0$, $x_2=3$.
	б) Позначаємо критичні точки на області визначення, визначаємо знак похідної на кожному проміжку і робимо висновки про поведінку функції на кожному проміжку (там де похідна додатна функція зростає, від’ємна – спадає).	Критичні точки та точка розриву розбивають область визначення на проміжки $(-\infty;0);(0;1);(1;3);(3;\infty)$. Знаходимо знаки похідної на цих проміжках:  Отже, функція зростає на проміжках $(-\infty;0)$, $(0;1)$ i $(3;\infty)$, спадає на проміжку $(1;3)$.

	в) Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою екстремуму і якщо так, то що це за екстремум.	В точці $x=3$ функція має мінімум, $y_{\min}=y(3)=\frac{3^3}{(3-1)^2}=\frac{27}{4}=6,75$. Маємо точку $C(3;\,6,75)$. Точка $\tilde{o}=1$ не належить області визначення, тому не може бути точкою екстремуму, а при переході через критичну точку $\tilde{o}=0$ функція не змінює свій знак.
	Друга похідна і дослідження функції на опуклість, вгнутість (там де похідна другого порядку додатна графік функції має опуклість направлену донизу, від'ємна – догори і якщо при переході через точку похідна другого порядку змінює знак, то це точка перегину).	$y''=\left(\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}\right)'=\left(\frac{(x^3-3x^2)}{(x-1)^3}\right)'=$ $=\frac{(x^3-3x^2)'\cdot(x-1)^3-((x-1)^3)'\cdot(x^3-3x^2)}{(x-1)^6}=$ $=\frac{(3x^2-6x)\cdot(x-1)^3-3(x-1)^2\cdot(x^3-3x^2)}{(x-1)^6}=$ $=\frac{3x(x-2)\cdot(x-1)^3-3x^2(x-1)^2\cdot(x-3)}{(x-1)^6}=$ $=\frac{3x\cdot(x-1)^2((x-2)(x-1)-x(x-3))}{(x-1)^6}=$ $=\frac{3x\cdot(x^2-3x+2-x^2+3x)}{(x-1)^4}=\frac{6x}{(x-1)^4}$ Прирівнюємо другу похідну до нуля: $\frac{6x}{(x-1)^4}=0$, $6x=0$ і $x\neq 1; x=0$. Отримані точки розбивають область визначення на проміжки $(-\infty;0);(0;1);\ (1;\infty)$. Знаходимо знаки другої похідної на цих проміжках:  Отже, графік функції має опуклість направлену догори на проміжку $(-\infty;0)$, а на проміжках $(0;1);(1;\infty)$ – донизу. Точка $x=0$ є абсцисою точки перегину $y(0)=\frac{0^3}{(0-1)^2}=\frac{0}{1}=0$. Точка $O(0;0)$ – точка перегину графіка функції.
	Похилі асимптоти до графіка функції.	Дослідимо чи графік має похилу асимптоту $y=kx+b$:

	Похила асимптота до графіка функції існує тоді і тільки тоді, коли існують дві скінченні границі $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ та $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$ причому у випадку, якщо k=0 це буде горизонтальна асимптота, як частинний випадок похилої.	$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x+1}=$ $=\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=$ $=\frac{1}{1-0+0}=1;$ $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}\right)=$ $=\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1}\right)=\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=$ $=\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2-0}{1-0+0}=2$ Отже, $y=x+2$ – похила асимптота.

8. Будуємо графік.



Запитання для самоперевірки

1. Яку залежність називають функцією?
2. Що теке область визначення функції?
3. Що називають графіком функції?
4. Яку функцію називають парною? непарною? Властивості їх графіків.
5. Яку функцію називають зростаючою? спадною?
6. Сформулюйте достатню умову зростання (спадання) функції на проміжку.
7. Яку точку називають точкою локального максимуму (мінімуму) функції?
8. Які точки називають критичними точками?
9. Сформулюйте необхідну і достатню умови існування точок екстремуму.
10. Коли графік функції має опуклість доверху? донизу?
11. Які точки називають точками перегину?
12. Сформулюйте необхідну і достатню умови існування точок перегину.
13. Що називають вертикальною асимптотою графіка функції?
14. Що називають похилою асимптотою графіка функції? Які умови повинні виконуватись, щоб існувала похила асимптота?
15. Запишіть загальну схему дослідження функції.

Навчальні завдання

20. Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції:

а) $y = x^3 - 12x + 11$; *б)* $y = -\frac{x^4}{4} + x^3$; *в)* $y = x^4 - 10x^2 + 9$;

г) $y = \frac{x^3}{3} + 4x$; *д)* $y = x + \ln(x+5)$; *е)* $y = \frac{x^2 - 2}{x^2}$;

є) $y = 7 - \sqrt{x^2 + 4x - 9}$; *ж)* $y = x + 2\cos x$.

21. Показати, що функція $y = 4 - 3x - x^2$ спадає на всій області визначення.

22. Знайти проміжки опуклості та угнутості графіка функції, точки його перегину.

а) $y = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x + 2;$ *б)* $y = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x + 2;$

в) $y = \frac{1}{3}x^5 - 4x^3 + 3;$ *г)* $y = \ln(4 + x^2)$.

23. Показати, що графік функції $y = \frac{1}{(x+7)^4}$ вгнутий на всі області визначення.

24. З’ясувати вигляд графіка функції $y=f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, якщо відомо, що на цьому інтервалі:

а) $y>0,\quad y'>0,\quad y''>0$; б) $y>0,\quad y'<0,\quad y''<0$;

в) $y<0,\quad y'<0,\quad y''>0$; г) $y<0,\quad y'>0,\quad y''<0$.

25. Записати рівняння асимптот до графіка функції

а) $y=\frac{4x^2}{4+x}$; б) $y=\frac{x^4-3}{x^3}$; в) $y=\frac{x^2+2}{(x-4)^2}$; г) $y=\frac{x^2}{x^2-9}$;

д) $y=\frac{2x^3}{x^2+9}$; е) $y=\frac{x^2}{x^3-1}$; є) $y=\frac{x^2+5x}{x-4}$; ж) $y=\frac{x+2}{x^2-1}$.

з) $y=\frac{1}{x^2-4}$; и) $y=\frac{(x+3)^2}{x^2+9}$

26. При яких значеннях a,b точка $A(1;3)$ буде точкою перегину графіка функції $y=ax^3+bx^2$?

27. Провести повне дослідження функцій і накреслити їх графіки:

а) $y=\frac{x}{1+x^2}$; б) $y=\frac{1}{1+x^2}$; в) $y=\frac{x^2}{x^2-1}$; г) $y=\frac{1}{x}+4x^2$;

д) $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$; е) $y=x^2e^{-x}$; є) $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$; ж) $y(x^3-1)=x^4$.

з) $y=\frac{x}{x^2-1}$; и) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$; і) $y=(x^2-1)^3$; ї) $y=\frac{x^3}{3-x^2}$;

й) $y=\frac{2x}{x^2+1}$; к) $y=\frac{4x}{x^3-8}$; л) $y=\frac{5x}{x^2-9}$; м) $y=\frac{x^2-4}{4+x^2}$.

§ 7. Задачі на найбільше чи найменше значення функції

Часто в житті приходиться шукати оптимальний розв’язок поставленої задачі, як то: з листа жесті певного розміру виготовити ящик максимальної ємкості; загородити ділянку певної площі, затративши при цьому мінімум матеріалу; розрахувати траєкторію руху вантажу, щоб на перевезення витратити мінімум коштів. Це, говорячи мовою математики, задачі на найбільше чи найменше значення функції на певному проміжку.

Тому для того, щоб знайти найбільше і найменше значення функції $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$ потрібно:

1. Знайти критичні точки функції і вибрати ті із них, які належать вказаному відрізку.

2. Знайти значення функції у критичних точках та на кінцях відрізка.

3. Серед знайдених значень вибрати найбільше і найменше значення.

Зауваження. У випадку, коли функція має на відрізку точку розриву потрібно розбити відрізок на проміжки, на яких функція неперервна і досліджувати на кожному проміжку окремо.

Приклад 1. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + 17$ на проміжку $[-3;0]$.

Схема		*Розв'язання*
1.	Знаходимо критичні точки функції (це ті точки з області визначення в яких похідна дорівнює 0. або не існує) і вибираємо ті із них, які належать вказаному відрізку.	Знайдемо похідну $y' = 12x^3 + 12x^2 - 48x - 48$. Прирівняємо її до нуля $12x^3 + 12x^2 - 48x - 48 = 0 \Rightarrow 12\left(x^2(x+1) - 4(x+1) = 0\right) \Rightarrow$ $(x+1)(x^2-4) = 0 \Rightarrow (x+1)(x+2)(x-2) = 0$, отже маємо три критичні точки $x_1 = -2$; $x_2 = -1$ та $x_3 = 2$. Із них проміжку $[-3;0]$ належать лише дві $x_1 = -2$ і $x_2 = -1$.
2.	Обчислюємо значення функції у критичних точках та на кінцях відрізка.	$y(-3) = 3(-3)^4 + 4(-3)^3 - 24(-3)^2 - 48(-3) + 17 = 80$ $y(-2) = 3(-2)^4 + 4(-2)^3 - 24(-2)^2 - 48(-2) + 17 = 33$ $y(-1) = 3(-1)^4 + 4(-1)^3 - 24(-1)^2 - 48(-1) + 17 = 40$ $y(0) = 3 \cdot 0^4 + 4 \cdot 0^3 - 24 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 + 17 = 17$
3.	Серед знайдених значень вибрати найбільше і найменше значення.	$y_{найбільше} = y(-3) = 80$; $y_{найменше} = y(0) = 17$

Розглянутий спосіб знаходження найбільших і найменших значень функції використовується і для розв'язування різноманітних прикладних задач.

Розв'язування прикладних задач методами математики як правило містить три основні етапи: 1) формалізація, тобто створення математичної моделі задачі; 2) розв'язування складеної математичної задачі; 3) інтерпретація знайденого розв'язку (тобто переклад його з мови математики в терміни початкової задачі).

Для знаходження найбільших і найменших значень зручно користуватись такою схемою:

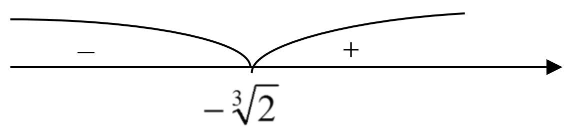
1) одну з величин, яку потрібно знайти позначаємо через *x*, інші величини виражаємо через *x* і дані задачі (і за змістом задачі накладаємо обмеження на *x*, якщо це можливо);

2) ту величину, про яку говориться, що вона найбільша чи найменша, виражаємо, як функцію від *x*;

3) досліджуємо одержану функцію на найбільше та найменше значення;

4) переконуємось, що одержаний результат має зміст для початкової задачі.

Приклад 2. Різниця двох чисел дорівнює 8. Якими мають бути ці числа, щоб добуток куба першого числа на друге був найменшим?

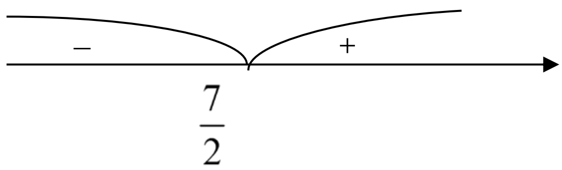
Схема		*Розв'язування*
1	Одну з величин, яку потрібно знайти позначаємо через *x*, інші величини виражаємо через *x* і дані задачі (і за змістом задачі накладаємо обмеження на *x*, якщо це можливо)	Позначимо одне з чисел, про які йде мова через *x*, тоді друге число $x+8$. В дані задачі неможливо знайти проміжок, який обмежував би значення *x*.
2.	Ту величину, про яку говориться, що вона найбільша чи найменша, виражаємо як функцію від *x*.	Добуток куба першого числа на друге записуємо так: $f(x)=x^3\cdot(x+8)=x^4+8x$.
3.	Досліджуємо одержану функцію на найбільше та найменше значення.	$f'(x)=\left(x^4+8x\right)'=4x^3+8$; $4x^3+8=0\Rightarrow x^3=-2\Rightarrow x=-\sqrt[3]{2}$; Так як проміжку, який би обмежував значення *x* немає, то перевіримо, чи являється знайдена критична точка точкою екстремуму і якщо так, то що це за екстремум.  Тобто знайдена точка є точкою мінімуму.

4.	Переконуємось, що одержаний результат має зміст для початкової задачі.	Отже, якщо одне з чисел буде $-\sqrt[3]{2}$, а друге $-\sqrt[3]{2}+8$, то добуток куба першого числа на друге був найменшим.

Приклад 3. Якими мають бути розміри ящика з кришкою місткістю $V = 1764\ см^3$, якщо сторони основи відносяться як 3:4, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

Розв'язання. Так як сторони основи відносяться як 3:4 то нехай $a = 3x,\ b = 4x$, тоді знаючи, що $V = abh$ знайдемо $h = \frac{V}{ab}$, тобто $h = \frac{1764}{12x^2}$. На виготовлення ящика буде витрачено найменшу кількість матеріалу, якщо площа повної поверхні ящика буде найменшою. Знайдемо цю площу: $S = 2\cdot 12x^2 + 2\cdot 3x\cdot\frac{1764}{12x^2} + 2\cdot 4x\cdot\frac{1764}{12x^2} = 24x^2 + {}$ $+\frac{882}{x} + \frac{1176}{x} = 24x^2 + \frac{2058}{x}$. Дослідимо функцію $S(x) = 24x^2 + \frac{2058}{x}$ на найменше значення. Знайдемо похідну $S'(x) = 48x - \frac{2058}{x^2} = \frac{48x^3 - 2058}{x^2}$. Відшукаємо стаціонарні точки цієї функції $S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{48x^3 - 2058}{x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 48x^3 - 2058 = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 = \frac{2058}{48} \Rightarrow\ x = \frac{7}{2}$.

Перевіримо, чи являється знайдена критична точка точкою екстремуму і якщо так, то що це за екстремум.



Тобто знайдена точка є точкою мінімуму. Отже, якщо одна сторона основи $a = 3x = 3\cdot\frac{7}{2} = 10.5$ *см*, а друга $b = 4x = 4\cdot\frac{7}{2} = 14$ *см* і висота $h = \frac{1764}{12x^2} = 12$ *см*, то на виготовлення цього ящика буде витрачено мінімум матеріалу.

Приклад 4. Знайти найбільший об'єм конуса, вписаного в кулю.

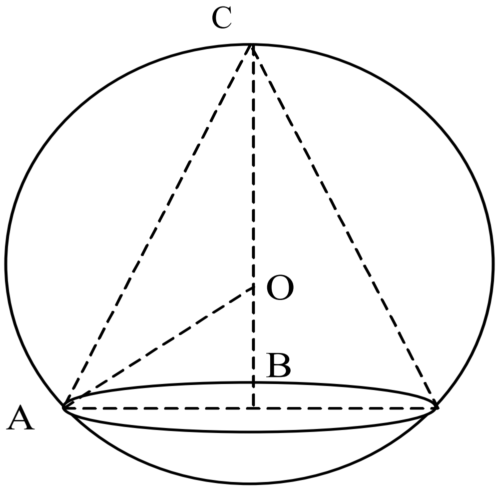
Розв'язання. Нехай радіус кулі АО = *R*, а радіус основи вписаного конуса АВ = *r* і його висота ВС = *x*.

Тоді об’єм конуса матиме вигляд:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi(2Rx - x^2)x$$

Одержану функцію дослідимо на екстремум.

$$V' = \frac{1}{3}\pi(4Rx - 3x^2) = 0.$$



Об'єм конуса обчислюється так: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 x$. Із трикутника ABO виразимо r^2 через x: $r^2 + (x - R)^2 = R^2$. Звідки $r^2 = 2Rx - x^2$. Звідки маємо $x_1 = 0$ – не має змісту, а другий корінь $x_2 = \frac{4}{3}R$.

Оскільки при $0 < x < \frac{4}{3}R$ похідна додатна, а при $\frac{4}{3}R < x < 2R$ – від'ємна, то в точці $x_2 = \frac{4}{3}R$ функція V має максимум.

Отже, найбільший об'єм конуса, вписаного в кулю, дорівнює:

$$V_{найбільший} = V\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{1}{3}\pi\left(2R \cdot \frac{16}{9}R^2 - \frac{64}{27}R^3\right) = \frac{32}{81}\pi R^3$$

Запитання для самоперевірки

1. Як знайти найбільше і найменше значення неперервної функції на відрізку?
2. Які три основні етапи використовують при розв'язуванні прикладних задач методами математики?

Навчальні завдання

21. Знайти найбільше та найменше значення функції на даному проміжку:

а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7;$ [-2; 2]; *б*) $y = -4x^3 + 9x^2 - 6x + 10;$ [0; 2];

в) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 12;$ [-4;0].

22. Число 12 подайте у вигляді суми двох невід′ємних доданків так, щоб добуток куба одного із них на подвоєний другий доданок був найбільшим.

23. Число 8 розкласти на два таких доданки, щоб сума їх кубів була найменшою.

91. Різниця двох чисел дорівнює 7. Якими мають бути ці числа, щоб добуток їх був найменшим?

24. Число 20 розкласти на два додатні множники так, щоб сума їх була найменшою з можливих.

25. Число 8 розкласти на два таких доданки, щоб сума їх кубів була найменшою.

26. Число 360 представити у вигляді суми трьох додатніх чисел так, щоб двоє з них відносились, як 1 : 2, а добуток всіх трьох доданків був найбільшим.

27. Число 20 записати у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб добуток одного з них на куб іншого був найбільшим.

28. Записати число 28 у вигляді суми двох доданків так, щоб сума їх квадратів набувала найменшого значення.

29. Число 60 представити у вигляді добутку двох співмножників так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

30. Число 180 представити у вигляді добутку двох співмножників так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

31. Число 32 розкладіть на два додатніх множники так, щоб сума першого множника і квадратного кореня із другого множника була найменшою.

32. Із куска дроту довжиною 12*м* згинають прямокутник. Якими мають бути його сторони, щоб площа була мінімальною?

33. Знайти глибину басейну об'ємом 256 $м^3$ з квадратним дном, на облицювання стін і дна якого пішло б найменше матеріалу.

34. Прямокутну ділянку площею 5000 $м^2$ необхідно обгородити тином, дві протилежні сторони якого кам'яні, а інші – дерев'яні. Один метр дерев'яного тину коштує 100гр., а кам'яного – 250 гр. Яка найменша кількість грошей може бути виділена на будівництво цього тину?

35. Необхідно виготовити закритий циліндричний бак об'ємом 27 $м^3$. Знайти такі розміри баку, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу.

36. Прямокутний лист жерсті має розміри 5 х 8 $дм^2$. В чотирьох його вершинах вирізають однакові квадрати і виготовляють відкриту коробку, загинаючи краї під прямим кутом. Який максимальний об'єм такої коробки?

Індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів по модулю "Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної"

1. Розв'язати квадратне рівняння та зробити перевірку.

1) $x^2-10x+41=0$,	2) $x^2-2x+50=0$,
3) $x^2-16x+89=0$,	4) $x^2-6x+10=0$,
5) $x^2-4x+85=0$,	6) $x^2-4x+5=0$,
7) $x^2-10x+26=0$,	8) $x^2-10x+74=0$,
9) $x^2+2x+5=0$,	10) $x^2-8x+41=0$,
11) $x^2+8x+80=0$,	12) $x^2-8x+25=0$,
13) $x^2+6x+10=0$,	14) $x^2+14x+50=0$,
15) $x^2-18x+97=0$,	16) $x^2-2x+82=0$,
17) $x^2-12x+52=0$,	18) $x^2-12x+40=0$,
19) $x^2+14x+53=0$,	20) $x^2-10x+61=0$,
21) $x^2+18x+90=0$,	22) $x^2-4x+13=0$,
23) $x^2-6x+73=0$,	24) $x^2+6x+58=0$,
25) $x^2+18x+97=0$,	26) $x^2+4x+40=0$,
27) $x^2+10x+74=0$,	28) $x^2-2x+50=0$,
29) $x^2-16x+100=0$,	30) $x^2+8x+80=0$,

2. Знайти границю:

1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+2x-15}{x^2+3x-18}$, якщо
а) *a*=3; б) *a*=1; в) *a*=∞.

2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{2x^2+14x+20}{3x^2+14x-5}$, якщо
а) *a*=-5; б) *a*=2; в) *a*=∞.

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-7x-6}{2x^2-5x-3}$, якщо
а) *a*=3; б) *a*=-1; в) *a*=∞.

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+x-6}$, якщо а) a=2; б) a=4; в) a=∞.

5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{7x^2-3x-4}{10x^2+2x-12}$, якщо а) a=1; б) a=-3; в) a=∞.

6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+2x-8}$, якщо а) a=2; б) a=-4; в) a=∞.

7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+4x-12}{x^2+2x-8}$, якщо а) a=2; б) a=1; в) a=∞.

8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{4x^2+5x-9}{5x^2-4x-1}$, якщо а) a=3; б) a=1; в) a=∞.

9) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+2x-5}$, якщо а) a=-2; б) a=1; в) a=∞.

10) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+7x-8}{x^2+4x-5}$, якщо а) a=-2; б) a=1; в) a=∞.

11) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+x-6}$, якщо а) a=2; б) a=1; в) a=∞.

12) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+x-12}$, якщо а) a=3; б) a=5; в) a=∞.

13) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+5x-6}{x^2+4x-5}$, якщо а) a=-3; б) a=1; в) a=∞.

14) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+4x-21}{x^2+2x-15}$, якщо а) a=-2; б) a=3; в) a=∞.

15) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+4x-12}{x^2+2x-8}$, якщо а) a=3; б) a=2; в) a=∞.

16) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x-6}$, якщо а) a=2; б) a=1; в) a=∞.

17) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x^2+2x-5}{6x^2-x-5}$, якщо а) a=-5; б) a=1; в) a=∞.

18) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+4x-12}$, якщо а) a=2; б) a=-2; в) a=∞.

19) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x-5}$, якщо а) a=4; б) a=1; в) a=∞.

20) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{5x^2-6x+1}{2x^2+3x-5}$, якщо а) a=3; б) a=1; в) a=∞.

21) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2-x-6}$, якщо а) a=2; б) a=5; в) a=∞.

22) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-2x-3}{3x^2-6x-9}$, якщо а) a=3; б) a=4; в) a=∞.

23) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+3x-18}$, якщо а) a=3; б) a=6; в) a=∞.

24) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+6x-8}$, якщо а) a=6; б) a=1; в) a=∞.

25) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$,якщо а) a=-4; б) a=2; в) a=∞.

26) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-12}$, якщо а) a=3; б) a=5; в) a=∞.

27) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{-3x^2+2x+16}{6x^2+12x}$ при а) a=4; б) a=-2; в) a=∞.

28) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{8x^2+5x-13}{-4x^2-x+5}$, якщо а) a=8; б) a=1; в) a=∞.

29) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2+7x-15}{6x^2+30x}$, якщо а) a=7; б) a=-5; в) a=∞.

30) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x^2-11x-4}{16-x^2}$, якщо а) a=3; б) a=4; в) a=∞.

3. Знайти точки розриву функції, визначити їх характер, у випадку усувного розриву до визначити функцію "по неперервності":

1) а) $y=\dfrac{1}{2-x}$; б) $y=\dfrac{3x^2+13x-10}{x+5}$;

2) а) $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$; б) $y=\dfrac{2x^2-6x+4}{x-2}$;

3) а) $y=\dfrac{2x+3}{3x-2}$; б) $y=\dfrac{4x^2-x-5}{x+1}$;

4) а) $y=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$; б) $y=\dfrac{4x^2+3x-10}{x+2}$;

5) а) $y=3^{\frac{5}{x}}$; б) $y=\dfrac{3x^2-7x+4}{x-1}$;

6) а) $y=\dfrac{x^2}{3-x}$; б) $y=\dfrac{2x^2+13x+20}{x+4}$;

7) а) $y=\frac{1}{x^2+5x+6}$; б) $y=\frac{7x^2+19x-6}{x+3}$; 8) а) $y=\frac{4}{(2-x)^2}$; б) $y=\frac{x^2+2x-15}{x+5}$;

9) а) $y=\frac{9x+1}{x^2+3x-4}$; б) $y=\frac{2x^2-5x+2}{x-2}$; 10) а) $y=\frac{x-5}{x^2-3x-18}$; б) $y=\frac{3x^2+7x-6}{x+3}$;

11) а) $y=\frac{4x}{5-x}$; б) $y=\frac{4x^2-19x+12}{x+5}-4$; 12) а) $y=\frac{4x-3}{x^2-25}$; б) $y=\frac{5x^2-x-6}{x+1}$;

13) а) $y=\frac{2x}{5+x}$; б) $y=\frac{6x^2-11x+5}{x-1}$; 14) а) $y=\frac{3x+4}{x^2-16}$; б) $y=\frac{7x^2+8x-12}{x+2}$;

15) а) $y=\frac{3x}{3+x}$; б) $y=\frac{6x^2-19x+14}{x-2}$; 16) а) $y=\frac{2x-8}{x^2+7x+10}$; б) $y=\frac{5x^2-9x-18}{x-3}$

17) а) $y=\frac{6x-5}{x^2-36}$; б) $y=\frac{4x^2+11x-20}{x+4}$; 18) а) $y=\frac{4x}{4-x}$; б) $y=\frac{3x^2-11x-20}{x-5}$;

19) а) $y=\frac{4x}{4+x}$; б) $y=\frac{2x^2+9x-18}{x+6}$; 20) а) $y=\frac{2x}{x^2-2x-48}$; б) $y=\frac{x^2-5x-14}{x-7}$;

21) а) $y=\frac{3x}{5+x}$; б) $y=\frac{2x^2-5x-18}{x+2}$; 22) а) $y=\frac{5-3x}{x^2-49}$; б) $y=\frac{3x^2+2x-16}{x-2}$;

23) а) $y=\frac{3x}{x-8}$; б) $y=\frac{4x^2-19x+21}{x-3}$; 24) а) $y=\frac{-x}{x^2-1}$; б) $y=\frac{5x^2-14x-24}{x-4}$;

25) а) $y=\frac{3x}{6+2x}$; б) $y=\frac{6x^2+19x-90}{x+4}$; 26) а) $y=\frac{1}{4x-x^2-3}$; б) $y=\frac{7x^2-17x-12}{x-3}$

27) а) $y=\frac{6x+1}{5+2x}$; б) $y=\frac{6x^2-7x-10}{x-2}$; 28) а) $y=\frac{2-x}{x^2+x-6}$; б) $y=\frac{4x^2-17x-15}{x-5}$;

29) а) $y=\frac{3+x}{8+2x}$; б) $y=\frac{5x^2+39x-8}{x+8}$; 30) а) $y=\frac{1-x}{x^2-3x-10}$; б) $y=\frac{6x^2+55x+9}{x+9}$

4. Знайти похідну функції:

1) $y=\left(x^2-2\right)tgx$; 2) $y=x^2\sin x$; 3) $y=\left(2-x^2\right)\cos x$;

4) $y=(3x-2)\,ctgx$; 5) $y=2\sqrt{x}\arcsin x$; 6) $y=5x^7\cos x$;

7) $y=5^x\,ctgx$; 8) $y=3x^8\sin x$; 9) $y=\sin x\arccos x$;

10) $y=\left(\sqrt[5]{x^3}-1\right)arctgx$; 11) $y=5^x\left(x^5-10x\right)$; 12) $y=x^4\log_4 x$;

13) $y=6^x\,arctgx$; 14) $y=\ln x\,arctgx$; 15) $y=(\ln x-\log_2 x)\sqrt{x}$;

16) $y=e^x\left(x^2+\sqrt{x}\right)$; 17) $y=\left(\cos x-2^x\right)\sin x$; 18) $y=(3\sin x+\cos x)tgx$;

19) $y=e^x\left(x^2+2x+2\right)$; 20) $y=3x^3\ln x$; 21) $y=2^x\arcsin x$;

22) $y = tgx \ln x$; 23) $y = (\log_3 x + 3)\sqrt[3]{x}$; 24) $y = tgx(e^x - x)$;

25) $y = (x^5 + \ln x)e^x$; 26) $y = (\sin x + 1)\lg x$; 27) $y = (x - arcctgx)5^x$;

28) $y = (ctgx - 1)\sqrt[9]{x^7}$; 29) $y = (1 + \sin x)\cos x$; 30) $y = 4\cos x(tgx - 2x)$.

5. Знайти похідну функції:

1) $y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$; 2) $y = \frac{x^2 + 2x}{x + 5}$; 3) $y = \frac{3x - x^2}{1 - 3x}$;

4) $y = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 5}$; 5) $y = \frac{x^2 e^x}{x^2 + 2}$; 6) $y = \frac{9x^2}{\ln x}$;

7) $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$; 8) $y = \frac{4x^2 + 8x + 3}{2x + 4}$; 9) $y = \frac{8x\sqrt{x} + 2}{x + 4}$;

10) $y = \frac{32 - 2x^2\sqrt{x}}{x^2 + 1}$; 11) $y = \frac{x\sqrt{x} + 4x}{2x^3 - 3}$; 12) $y = \frac{243x - 2x^3}{x^3 + 4}$;

13) $y = \frac{27\sqrt{x} + 8x^2}{\ln x}$; 14) $y = \frac{2x - x^4\sqrt{x} + 1}{x^4 - 5}$; 15) $y = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 - 4x + 3}$;

16) $y = \frac{3x + \ln x}{5x + \ln x}$; 17) $y = \frac{1 + \ln x}{x}$; 18) $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$;

19) $y = \frac{2\sqrt{x}}{x - 4}$; 20) $y = \frac{x^3}{\ln x}$; 21) $y = \frac{2x + 1}{\sqrt{x} - 1}$;

22) $y = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$; 23) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$; 24) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x + \sqrt[3]{x^2}}$;

25) $y = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^3 + 2}$; 26) $y = \frac{x - \sin x}{\sqrt{x}}$; 27) $y = \frac{3\sqrt[3]{x} - \cos x}{2\sin x}$;

28) $y = \frac{tgx}{\sin x + 2}$; 29) $y = \frac{-5\sin x}{2 + \sqrt{x}}$; 30) $y = \frac{ctgx}{2\sqrt{x} - 1}$.

6. Знайти похідну складеної функції:

1) $y = 3^{\sin 6x} tg6x$; 2) $y = 3^{x^2 - 5x}$; 3) $y = 2^{\sin 2x} + 4x^2$;

4) $y = 3^{\cos^2 4x}$; 5) $y = 8^{\sin 2x} tg2x$; 6) $y = 10^{5 - 3x^3}$;

7) $y = e^{\sin^2 x}$; 8) $y = 3^{ctg7x} \sin 7x$; 9) $y = 6^{\sin 3x} tg3x$;

10) $y = 2^{\sin^2 \frac{1}{x}}$; 11) $y = e^{\sqrt[4]{x^3}}$; 12) $y = e^{\arccos 5x}$;

13) $y = 5^{\sin 8x} tg8x + 9x$; 14) $y = 5^{x^3 - 3x^2 + 2x}$; 15) $y = 2^{tg\frac{1}{x}}$;

16) $y = e^{\sqrt{\ln x}}$; 17) $y = 2^{\sin 9x} tg 9x - 2x^2$; 18) $y = 15^{8-2x^7}$;

19) $y = 2^{\cos 5x} - 7x^4$; 20) $y = e^{\cos^2 x}$; 21) $y = 4^{\sin 7x} tg 7x$;

22) $y = e^{5\sqrt[5]{x^2}} + 6$; 23) $y = 2^{x^4+5x^3-7x}$; 24) $y = 2^{ctg\frac{1}{x}} + 3x^7$;

25) $y = 6^{\sin 4x} tg 4x$; 26) $y = e^{\arcsin 7x}$; 27) $y = e^{\cos^2 x}$;

28) $y = 4^{5x^3-4x^2+10x}$; 29) $y = 7^{\sin 3x} tg 3x$; 30) $y = 2^{\cos 9x} ctg 9x + x^{12}$.

7. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-15}{x^2+3x-18}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+14x+20}{3x^2+14x-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-7x-6}{2x^2-5x-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-2}{x^2+x-6}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^2-3x-4}{10x^2+2x-12}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-2}{x^2+2x-8}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-12}{x^2+2x-8}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2+5x-9}{5x^2-4x-1}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+1}{3x^2+2x-5}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-8}{x^2+4x-5}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-8}{x^2+x-6}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-15}{x^2+x-12}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+5x-6}{x^2+4x-5}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-21}{x^2+2x-15}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-12}{x^2+2x-8}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^2+5x-6}$; 17) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x-5}{6x^2-x-5}$; 18) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-10}{x^2+4x-12}$;

19) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-4}{x^2+4x-5}$; 20) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-6x+1}{2x^2+3x-5}$; 21) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-10}{2x^2-x-6}$;

22) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-3}{3x^2-6x-9}$; 23) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-15}{x^2+3x-18}$; 24) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-4x+1}{2x^2+6x-8}$;

25) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$; 26) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-12}$; 27) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3x^2+2x+16}{6x^2+12x}$;

28) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8x^2+5x-13}{-4x^2-x+5}$; 29) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+7x-15}{6x^2+30x}$; 30) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-11x-4}{16-x^2}$.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{9x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{tg3x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{tg15x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg14x}{tg2x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cos 3x}{\sin 5x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tg5x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x}{\sin 6x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 12x}{tg5x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 17x}{tg5x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{12x}{tg6x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{tg3x}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tg6x}$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x}{x}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}$; 20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 15x}$; 21) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{tg6x}$;

22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{2x}$; 23) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{tg8x}$; 24) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg2x}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{2x}$; 26) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 8x}$; 27) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tgx}$;

28) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x}$; 29) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x}{tgx}$; 30) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 8x}$.

9. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1) $y=\frac{x^2}{2(x-1)}$; 2) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$; 3) $y=\frac{x^2+2}{(x-4)^2}$;

4) $y=\frac{x^2}{x^2-9}$; 5) $y=\frac{2x}{x^3-8}$; 6) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$;

7) $y=\frac{x^2-4}{x^2+4}$; 8) $y=\frac{4x^3}{1-x^2}$; 9) $y=\frac{2x^2}{x+1}$;

10) $y=\frac{x}{x^2-4}$; 11) $y=\frac{9-x^2}{x^2+9}$; 12) $y=\frac{x^2+x-5}{x-2}$;

13) $y=\frac{(x+2)^2}{x^2+4}$; 14) $y=\frac{x^2+6}{x^2-1}$; 15) $y=\frac{(x+2)^2}{x-2}$;

16) $y=\frac{5x}{x^2-4}$; 17) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$; 18) $y=\frac{x^2}{x^3-1}$;

19) $y=\frac{x^2}{x+1}$; 20) $y=\frac{x^2}{x-3}$; 21) $y=\frac{x^2}{x+1}$;

22) $y=\frac{x^2-4}{2x+1}$; 23) $y=\frac{x^2+5x}{x-4}$; 24) $y=\frac{x^2}{x-2}$;

25) $y=\frac{x+3}{x^2-4}$; 26) $y=\frac{x+2}{x^2-1}$; 27) $y=\frac{x^2+2x}{x-1}$;

28) $y=\frac{x^2-2x}{x-1}$; 29) $y=\frac{x^2-5x}{x+4}$; 30) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

10. Розв'язати задачу

1) Знайти розміри прямокутника, що має найменший периметр серед прямокутників, площа яких дорівнює 16 см^2.
2) Парканом довжиною *p* необхідно загородити найбільшу за площею прямокутну ділянку, що межує з річкою. Якими мають бути розміри ділянки, якщо зі сторони річки паркан відсутній?
3) Парканом довжиною *p* необхідно загородити найбільшу за площею прямокутну ділянку. Якими мають бути розміри ділянки?
4) Якими мають бути сторони прямокутної ділянки площею 1600м^2, якщо на її огорожу витрачено найменшу кількість матеріалу?
5) З усіх прямокутників, площа яких 25см^2, знайти прямокутник з найменшим периметром.
6) Вікно прямокутної форми має периметр 6 м. Якими мають бути розміри вікна, якщо площа його найбільша?
7) З усіх прямокутників площею 9 дм^2 знайти той, периметр якого найменший.
8) Зі всіх прямокутників з діагоналлю 4 дм знайти той, площа якого найбільша.
9) Знайти довжини сторін прямокутника, що має площу 144 см^2 та найменший периметр.
10) Знайти довжини сторін прямокутника, що при периметрі 48 см має найбільшу площу.
11) Необхідно обгородити прямокутну ділянку землі площею 400 м^2. При яких розмірах прямокутника довжина паркану буде мінімальною?
12) З усіх прямокутників, що мають периметр 20 см, знайти той, у якого діагональ найменша.
13) Відрізок АВ=60 см ділиться на дві частини точкою С і будується прямокутник, сторони якого дорівнюють АС і СВ. Знайти найбільше значення його площі.

14) Знайти довжини сторін прямокутника з периметром 72 см, що має найбільшу площу.

15) Із усіх прямокутників площею 100 м^2 знайти такий, периметр якого найменший.

16) З куска дроту довжиною 50 см зігнути прямокутник найбільшої площі.

17) Потрібно обгородити парканом прямокутну ділянку землі площею 216 м^2, а далі поділити її на дві частини стіною, паралельною одній із сторін ділянки. Якої довжини слід узяти сторони ділянки, щоб на цю споруду пішла найменша кількість матеріалу?

18) Сума двох діагоналей паралелограма дорівнює 26, кут між ними 30°. Якими мають бути довжини діагоналей, щоб площа паралелограма була найбільшою?

19) Серед рівнобедрених трикутників з бічними сторонами 6 см вибрати трикутник найбільшої площі.

20) Із дроту довжиною 76 см зігнули прямокутник. Якими повинні бути розміри прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

21) Парканом довжиною 120 м необхідно загородити прямокутну ділянку землі найбільшої площі. Які повинні бути розміри ділянки?

22) Сума діагоналей паралелограма дорівнює 8. Знайти найменшу суму квадратів всіх його сторін.

23) Прямокутний загін, який однією стороною прилягає до річки, треба огородити дротяною сіткою завдовжки 200 м. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

24) Необхідно обгородити прямокутну ділянку землі площею 900 м^2. При яких розмірах ділянки на паркан витратиться мінімум матеріалу?

25) Кусок дроту завдовжки 1,8 м згинають так, щоб утворився прямокутник. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

26) Необхідно обгородити прямокутну ділянку землі площею 294 м^2 і розділити потім цю ділянку тином на дві рівні частини. При яких розмірах ділянки довжина всього тину буде найменшою?

27) Сума двох сторін трикутника дорівнює 6, а кут між ними 30°. Які повинні бути ці сторони, щоб площа трикутника була найбільшою?

28) У магазині фермер купив матеріал для огорожі завдовжки 200 м. Як відгородити прямокутну ділянку найбільшої площі ?

29) Серед рівнобедрених трикутників із бічною стороною 16 см знайти трикутник, площа якого найбільша.

30) Сума двох сторін трикутника дорівнює 10 см, а кут між ними 30°. Які повині бути ці сторони, щоб площа трикутника була найбільшою?

ТЕСТОВИЙ КОНТРОЛЬ З МОДУЛЯ

"Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної"

1. Сумою двох комплексних чисел $a + bi$ та $c + di$ називається комплексне число

а) $(a + c) + (b + d)i$. б) $(a – c) + (b + d)i$. в) $(a – c) + (b – d)i$. г) $(a \cdot c) + (b \cdot d)i$.

2. Різницею двох комплексних чисел $a + bi$ та $c + di$ називається комплексне число

а) $(a + c) + (b + d)i$. б) $(a + c) + (b – d)i$. в) $(a – c) + (b – d)i$. г) $(a – c) + (b + d)i$.

3. Добутком двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число

а) $(ac + bd) + (ad + bc)i$. б) $(ac - bd) + (ad – bc)i$.

в) $(ac - bd) + (ad + bc)i$. г) $(ac + bd) + (ad – bc)i$.

4. Часткою двох комплексних чисел $a + bi$ та $c + di$ називається комплексне число

а) $\frac{ac-bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i$ б) $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb+ad}{c^2+d^2}i$.

в) $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i$ г) $\frac{a}{c}+\frac{b}{\mathrm{d}}i$.

5. Модулем комплексного числа $a + bi$ називається вираз

а) $\sqrt{a^2+b^2}$. б) $|a+b|$. в) $\sqrt{a^2-b^2}$. г) $\sqrt{(a+b)^2}$.

6. Кут φ між віссю Ох і відрізком ОМ, де точка М зображає комплексне число *a* + *bi* називається ________ комплексного числа *a* + *bi* .

а) аргументом б) модулем в) уявною частиною г) дійсною частиною

7. Якщо існує границя відношення $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ то цю границю називають ________ функції *f(x).*

а) похідною б) диференціалом в) повним приростом г) приростом

8. Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції *y=f(x)* у точці x_0 має вигляд

а) $y+f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. б) $y-f(x_0)=f'(x_0)(x+x_0)$.

в) $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. г) $y=f'(x_0)+f(x_0)(x-x_0)$.

9. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в точці *x*, тоді $(f(x)\cdot g(x))' =$

а) $f'(x)\cdot g'(x)+g'(x)\cdot f'(x)$ б) $f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$

в) $f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)$ г) $f'(x)\cdot g'(x)$

10. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в точці *x*, тоді $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' =$

а) $\dfrac{f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}$. б) $\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}$.

в) $\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g(x)}$. г) $\dfrac{f(x)\cdot g'(x)-g(x)\cdot f'(x)}{g^2(x)}$.

11. Величину $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ називають ________ в точці x_0.

а) приростом функції б) похідною функції

в) приростом аргументу г) диференціалом функції

12. Величину $\Delta x = x - x_0$ називають ________ в точці x_0.

а) приростом функції б) похідною функції

в) приростом аргументу г) диференціалом функції

13. Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в точці x_0 до графіка функції, дорівнює значенню похідної в цій точці: $tg\alpha = f'(x_o)$, де α- кут нахилу дотичної до додатнього напряму осі Ох –

а) механічний зміст похідної. б) фізичний зміст похідної.

в) геометричний зміст похідної. г) економічний зміст похідної.

14. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$, причому С ≠ 0, то говорять що

а) $\alpha(x)$ - нескінченно мала більш високого порядку, ніж $\beta(x)$.

б) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими одного порядку.

в) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є еквівалентними нескінченно малими;

г) нескінченно малі в точці x_0 непорівнянні.

15. Якщо функція неперервна на відрізку, то на цьому відрізку існують точки, в яких функція

а) дорівнює нулю.

б) набуває свого найбільшого і найменшого значення на цьому відрізку.

в) набуває такого ж значення, як і в одному із кінців.

г) набуває додатних значень.

16. Якщо функція *f(x)* має границю в точці x_o і в деякому проколотому околі цієї точки має місце нерівність $f(x)\le A$, то

а) $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\ge A$. б) $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\le A$. в) $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=A$. г) $\left|\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\right|\le A$.

17. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то говорять що

а) $\alpha(x)$ - нескінченно мала більш високого порядку, ніж $\beta(x)$.

б) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими одного порядку малості.

в) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є еквівалентними нескінченно малими;

г) нескінченно малі в точці x_0 непорівнянні.

18. Нехай функція *y=f(x)* неперервна на відрізку [*a; b*] , причому *f(a)* $\neq$ *f(b)* . Тоді для будь-якого С$\in (f(a);\ f(b))$ на інтервалі (*a*; *b*) знайдеться принаймні одна точка *c* така, що

а) *f(c)* = 0.   б) *f(c)* = –С.   в) *f(c)* =С.   г) *f(c)* =c.

19. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то говорять що

а) $\alpha(x)$ - нескінченно мала більш високого порядку, ніж $\beta(x)$;

б) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими одного порядку малості;

в) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є еквівалентними нескінченно малими;

г) нескінченно малі в точці x_0 непорівнянні.

20. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то функцію $\alpha(x)$ називають

а) нескінченно великою в точці x_0;   *б)* нескінченно малою в точці x_0;

в) нульовою; *г*) нескінченною.

21. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то говорять що

а) $\alpha(x)$ - нескінченно мала більш високого порядку, ніж $\beta(x)$.

б) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими одного порядку.

в) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є еквівалентними нескінченно малими;

г) нескінченно малі в точці x_0 непорівнянні.

22. Нехай функція *f(x)* задовольняє умови: 1) визначена і неперервна на відрізку [*a;b*]; 2) диференційовна на інтервалі (*a;b*); 3) $g'(x)\neq 0$. Тоді на інтервалі (*a;b*) знайдеться принаймні одна точка *c* така, що

а) $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. б) $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. в) $f'(c)=0$. г) $f(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

23. Нехай $y=f(x)$ - деяка диференційовна функція на інтервалі (*a*;*b*), причому похідна цієї функції $y'=f'(x)$ також є диференційовною функцією на зазначеному інтервалі. Похідну функції $f'(x)$ називають

а) диференціалом функції $y=f(x)$; *б*) похідною другого порядку функції $y=f(x)$;

в) похідною третього порядку функції $y=f(x)$; *г*) первісною функції $y=f(x)$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=$

а) 3; б) 1; в) $\dfrac{1}{3}$; г) 0.

25. $(xtgx+4)'=...$

а) $tgx+4x$; б) $\dfrac{1}{\cos^2 x}+4$; в) $tgx+\dfrac{x}{\cos^2 x}$; г) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

26. Функція у = 2 x^3 – 4 x^2 + 2 x + 5 спадає на проміжках:

а) (-∞; $\frac{1}{3}$) і (1; ∞); б) (-∞; -$\frac{1}{3}$) і (1; ∞); в) ($\frac{1}{3}$; 1); г) $(-\infty;\infty)$.

27. Тіло рухається по закону $S(t)=t^2-2t-8$, де *S(t)* – шлях в метрах, t – час у секундах. В який момент тіло зупиниться?

а) *t* = 1 с; б) *t* = 4 с; в) *t* = 2 с; г) *t* = 7 с.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x}{x^2+1}=$

а) ∞ б) 5; в) 0; г) 1.

29. $\ell im_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg3x}=...$

а) $\frac{3}{5}$; б) 0; в) $\frac{5}{3}$; г) 1.

30. $(5x^3\ell nx)' = ...$

а) $5x^3\ell nx$; б) 15*x*; в) $15x^3\ell nx + x^2$; г) $15x^2\ell nx + 5x^2$.

Предметрий покажчик

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

А

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку — мінор цього елемента, взятий із знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

***Аргумент* комплексного числа** $a+bi$ — кут φ між додатнім напрямом осі Ox і вектором $\overrightarrow{OM}$, де точка M зображає комплексне число $a+bi$, причому величина кута вважається додатною, якщо відлік ведеться проти годинникової стрілки, і від'ємною в противному випадку.

***Асимптота* кривої $y = f(x)$** — пряма лінія, якщо відстань точки $M(x, f(x))$ кривої від цієї прямої прямує до нуля при віддаленні точки M в нескінченність.

Афінна система координат в просторі — сукупність точки O і базису, що задається векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Б

Базис векторного простору — система лінійно незалежних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ така, що будь-який вектор лінійного простору може бути представлений у вигляді їх лінійної комбінації $\vec{b}_i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} \vec{a}_j,\ i = 1, 2, \ldots, n$

В

Вектор (геометричний) – будь-яку величину, що має напрям (наприклад, сила, що діє на матеріальну точку, прискорення, швидкість).У геометрії *вектором* називають напрямлений відрізок. Напрям вектора вказується стрілкою.

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — такий вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови: 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}; \vec{b})$; 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$; 3) трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ права.

Визначник n-го порядку — алгебраїчна сума всіх можливих добутків, які містять по одному елементу з кожного рядка і кожного стовпчика матриці. Знак кожного доданка дорівнює (-1)-1^t , де t – число інверсій в других індексах, якщо елементи доданка розташовані у порядку зростання перших індексів.

Визначена система рівнянь –– сумісна система рівнянь, якщо вона має єдиний розв'язок. і *невизначеною*, якщо розв'язків більш як один.

Г

Гіпербола — множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок (*фокусів)*, є величиною сталою, яка дорівнює 2*a* і менша за відстань між фокусами.

Границя послідовності $\{a_n\}$— число a, якщо для кожного, як завгодно малого, додатного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N(\varepsilon)$, що $|a_n - a| < \varepsilon$ для всіх $n > N(\varepsilon)$.

Границя функції $y = f(x)$ ***в точці*** x_0 — число А, якщо для будь-якого додатного числа ε існує додатне число $\delta(\varepsilon)$ таке, що для будь-якого x, для якого справедливі умови: $|x - x_o| < \delta(\varepsilon)$ і $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Д

Диференційовна у точці x_0 функція – функція, я приріст якої можна представити у вигляді $\Delta y(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, де A – стала величина, яка не залежить від Δx і $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Диференціал функції — головна лінійна відносно Δx частина приросту диференційовної функції.

Добутк **вектора** $\vec{a}$ **на число λ** — вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови:

1) $|\vec{c}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$; 2) якщо $\lambda>0$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$; 3) якщо $\lambda<0$, то $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{c}$.

Добуток матриці $A=(a_{ij})$ на деяке число k — матриця $C=(c_{ij})$, кожен елемент якої дорівнює добутку відповідних елементів матриці A на k, $C=kA=(c_{ij})=(ka_{ij})$.

Добуток матриці $A=(a_{ij})$ розмірності $m\times p$ на матрицю $B=(b_{ij})$ розмірності $p\times n$ — матриця $C=(c_{ij})$ розмірності $m\times n$, з елементами $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$.

Довжина вектора — визначається формулою $|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Е

Елементарні перетворення матриці A — такі перетворення:

4) заміна місцями двох рядків або двох стовпців матриці;

5) множення рядка або стовпця матриці на будь-яке відмінне від нуля число;

6) додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помноженого на деяке число.

Еквівалентні матриці –– матриці, які мають рівні ранги.

Екстремум – точки локального максимуму і мінімуму, а значення функції в цих точках *екстремумами* функції.

Еліпс – множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок (*фокусів*), є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами.

К

Колінеарні вектори –– два вектори, які лежать на одній, або на паралельних прямих.

Компланарні вектори — вектори, які лежать в одній чи паралельних площинах.

Коло – множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки (*центра*).

Критичні точки — стаціонарні точки із області визначення функції та точки, в яких похідна функції не існує. .

М

Максимум (мінімум) функції Якщо існує окіл $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, $\delta>0$ точки x_0 в якому для всіх x, крім $x=x_0$, виконується нерівність $f(x)>f(x_0)$, то точку x_0 називають *точкою локального мінімуму*, а саме значення функції в цій точці *мінімумом* функції.

Матриця — таблиця упорядкованих чисел або будь-яких інших об'єктів, яка містить m рядків

Мінор ***M_{ij}*** елемента a_{ij} визначника *n*-го порядку –– визначник (*n*–1)-го порядку, отриманий із даного шляхом викреслення *і*-го рядка і *j*- го стовпця , на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

Мішаний добуток трьох векторів — два вектори множаться векторно: $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{d}$, а отриманий вектор $\vec{d}$ скалярно множиться на вектор $\vec{c}$.

Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь –- метод пов'язаний із послідовним виключенням невідомих із системи рівнянь

Модуль **комплексного числа** $a + bi$ — довжина вектора, який відповідає цьому числу $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Н

Неперервна у точці x_0 функція $y = f(x)$ — функція, для якої виконується умова $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

О

Обернена **матриця** *A^{-1}* до квадратної матриці *A* — це матриця, для якої виконується співвідношення $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

П

Парабола – множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої (*директриси)*, яка не проходить через фокус.

Похідна **функції** $f(x)$ **в точці** x_0 **—** якщо існує границя відношення $\lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ і позначають $f'(x_0)$.

Правила Лопіталя **—** границя відношення двох нескінченно малих (нескінченно великих) функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо така границя існує $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Правило Саррюса – перші три доданки є добутками елементів головної діагоналі і елементів вершин трикутників з основами, паралельними головній діагоналі .Три останні доданки мають від'ємний знак. Вони є добутками елементів неголовної діагоналі та елементів вершин трикутників з основами, паралельними неголовній діагоналі.

Правило паралелограма — якщо вектори мають спільний початок, то їх сумою буде вектор, що являє собою діагональ паралелограма побудованого на цих векторах, як на сторонах.

Проекція вектора $\vec{AB}$ *на вісь l* — довжину $A'B'$, де A' і B' проекції точок *A* і *B* на вісь *l*, взяту із знаком "+", якщо вектор $\vec{AB}$ співнапрямлений з віссю *l* та із знаком "–" у випадку коли вони протилежно напрямлені.

Р

Ранг матриці –найвищий порядок відмінного від нуля мінора, утвореного з елементів цієї матриці.

Різниця векторів $\vec{a}$ **–** $\vec{b}$ -- вектор $\vec{c}$, для якого виконується рівність $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

С

Скалярний добуток двох векторів — добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Сума двох векторів $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ — вектор $\vec{c}$, початок якого співпадає з початком вектора $\vec{a}$, а кінець з кінцем вектора $\vec{b}$, при умові, що початок вектора $\vec{b}$ співпадає з кінцем вектора $\vec{a}$.

Сума матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ однакової розмірності — матриця $C = (c_{ij})$ цієї розмірності, з елементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Сумісна система рівнянь — система рівнянь, яка має хоча б один розв'язок.

Стаціонарні точки **—** точки із області визначення функції, в яких похідна функції дорівнює нулю. .

Т

Теорема Кронекера-Капеллі **—** система буде сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи. Якщо *rangA = rang B= n ,* то система *визначена*. Коли *rang A = rang B< n* , то система *невизначена*.

Точки локального екстремуму. Якщо існує окіл ($x_0-\delta; x_0+\delta$), $\delta>0$ точки x_0 в якому для всіх *x,* крім $x=x_0$, виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$, то точку x_0 називають *точкою локального максимуму*, а саме значення функції в цій точці *максимумом* функції.

Якщо існує окіл ($x_0-\delta; x_0+\delta$), $\delta>0$ точки x_0 в якому для всіх *x,* крім $x=x_0$, виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$, то точку x_0 називають *точкою локального мінімуму*, а саме значення функції в цій точці *мінімумом* функції.

Транспонована матриця $\boldsymbol{A^T}$ — матриця, яка отримується при заміні в квадратній матриці *A* рядків відповідними стовпцями.

Ф

Формули Крамера — якщо основний визначник Δ неоднорідної системи *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами $x_i = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, *k* = 1, 2.... , де Δ_k – допоміжний визначник системи, який одержується шляхом заміни *к*-го стовпця визначника Δ стовпцем вільних членів системи.

Додатки

Розкладання на множники многочленна $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$; $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$; $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 та x_2 – корені квадратного тричлена.	**Квадратні рівняння** $ax^2+bx+c=0; \quad a \neq 0$ $D = b^2 - 4ac;$ $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$ Теорема Вієта для зведеного квадратного рівняння $x^2+px+q=0$: $x_1+x_2=-p$; $x_1x_2=q$.
Властивості степенів $a^0 = 1, \quad a \neq 0$ $a^p \cdot a^q = a^{p+q}; \quad a^p \cdot b^p = (ab)^p$ $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p+q}; \quad \dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$ $(a^p)^q = a^{pq}$ $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r},$	**Корені та їх властивості** $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}, \quad якщо \quad a \geq 0$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad a \geq 0, b \geq 0$ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, \quad a \geq 0, b \geq 0$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad якщо \quad a \geq 0$ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, \quad якщо \quad a \geq 0$.

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad де\ a \geq 0,\ m, n \in N$	
Площа трикутника $S = \frac{1}{2} a h_a; \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma;$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$ $S = \frac{abc}{4R}; \quad S = pr.$	**Площа паралелограма** $S = a h_a; S = ab \sin \gamma;$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \beta.$ **Площа трапеції** $S = \frac{a+b}{2} h.$
Площа круга $S = \pi r^2.$ **Довжина кола** $l = 2\pi r$	**Об'єм призми** $V = S_{основи} \cdot H.$ **Об'єм піраміди** $V = \frac{1}{3} S_{основи} \cdot H$
Об'єм циліндра $V = \pi R^2 H;$ **Площа бічної поверхні циліндра** $S = 2\pi R H.$	**Об'єм конуса** $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H;$ **Площа бічної поверхні конуса** $S = \pi R l.$
Об'єм кулі $V = \frac{4}{3} \pi R^3$	**Площа поверхні сфери** $S = 4\pi R^2$

Властивості логарифмів

1. $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ 2. $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ 3. $n \ln a = \ln(a)^n$ 4. $\ln 1 = 0$

Значення тригонометричних функцій

α	**Радіани**	sin α	cos α	tg α	ctg α	α	**Радіани**	sin α	cos α	tg α	ctg α
0°	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	∞	46°	0,8029	0,7193	0,6947	1,0355	0,9657
1°	0,0175	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	47°	0,8203	0,7314	0,6820	1,0724	0,9325
2°	0,0349	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	48°	0,8378	0,7431	0,6691	1,1106	0,9004
3°	0,0524	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	49°	0,8552	0,7547	0,6561	1,1504	0,8693
4°	0,0698	0,0698	0,9976	0,0699	14,300	50°	0,8727	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
5°	0,0873	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	51°	0,8901	0,7771	0,6293	1,2349	0,8098
6°	0,1047	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	52°	0,9076	0,7880	0,6157	1,2799	0,7813
7°	0,1222	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	53°	0,9250	0,7986	0,6018	1,3270	0,7536
8°	0,1396	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	54°	0,9425	0,8090	0,5878	1,3764	0,7265
9°	0,1571	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	55°	0,9599	0,8192	0,5736	1,4281	0,7002
10°	0,1745	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	56°	0,9774	0,8290	0,5592	1,4826	0,6745
11°	0,1920	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	57°	0,9948	0,8387	0,5446	1,5399	0,6494
12°	0,2094	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	58°	1,0123	0,8480	0,5299	1,6003	0,6249
13°	0,2269	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	59°	1,0297	0,8572	0,5150	1,6643	0,6009
14°	0,2443	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	60°	1,0472	0,8660	0,5000	1,7321	0,5774
15°	0,2618	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	61°	1,0647	0,8746	0,4848	1,8040	0,5543
16°	0,2793	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	62°	1,0821	0,8829	0,4695	1,8807	0,5317
17°	0,2967	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	63°	1,0996	0,8910	0,4540	1,9626	0,5095
18°	0,3142	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	64°	1,1170	0,8988	0,4384	2,0503	0,4877

19°	0,3316	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	65°	1,1345	0,9063	0,4226	2,1445	0,4663
20°	0,3491	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	66°	1,1519	0,9135	0,4067	2,2460	0,4452
21°	0,3665	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	67°	1,1694	0,9205	0,3907	2,3559	0,4245
22°	0,3840	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68°	1,1868	0,9272	0,3746	2,4751	0,4040
23°	0,4014	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	69°	1,2043	0,9336	0,3584	2,6051	0,3839
24°	0,4189	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	70°	1,2217	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
25°	0,4363	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	71°	1,2392	0,9455	0,3256	2,9042	0,3443
26°	0,4538	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	72°	1,2566	0,9511	0,3090	3,0777	0,3249
27°	0,4712	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	73°	1,2741	0,9563	0,2924	3,2709	0,3057
28°	0,4887	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	74°	1,2915	0,9613	0,2756	3,4874	0,2867
29°	0,5061	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	75°	1,3090	0,9659	0,2588	3,7321	0,2679
30°	0,5236	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	76°	1,3265	0,9703	0,2419	4,0108	0,2493
31°	0,5411	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	77°	1,3439	0,9744	0,2250	4,3315	0,2309
32°	0,5585	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	78°	1,3614	0,9781	0,2079	4,7046	0,2126
33°	0,5760	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	79°	1,3788	0,9816	0,1908	5,1446	0,1944
34°	0,5934	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	80°	1,3963	0,9848	0,1736	5,6713	0,1763
35°	0,6109	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	81°	1,4137	0,9877	0,1564	6,3138	0,1584
36°	0,6283	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	82°	1,4312	0,9903	0,1392	7,1154	0,1405
37°	0,6458	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	83°	1,4486	0,9925	0,1219	8,1443	0,1228
38°	0,6632	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	84°	1,4661	0,9945	0,1045	9,5144	0,1051
39°	0,6807	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	85°	1,4835	0,9962	0,0872	11,430	0,0875
40°	0,6981	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	86°	1,5010	0,9976	0,0698	14,300	0,0699
41°	0,7156	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	87°	1,5184	0,9986	0,0523	19,081	0,0524
42°	0,7330	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	88°	1,5359	0,9994	0,0349	28,636	0,0349
43°	0,7505	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	89°	1,5533	0,9998	0,0175	57,290	0,0175
44°	0,7679	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	90°	1,5708	1,0000	0,0000	∞	0,0000
45°	0,7854	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000						

Література

Методичне забезпечення

1. Закорчевна С. А.. Диференціальне числення. Методичні рекомендації з вивчення теми та індивідуальні розрахункові роботи (для студентів інженерно-технологічного факультету). С.А. Закорчевна, Т.І.Труш Під ред. Березовського В.Є. -Умань: ВПЦ „Візаві”.- 2010.– 80с.
2. Закорчевна С. А. Методичні рекомендації для проведення практичних занять з вищої математики по модулю " Векторна та аналітична геометрія". (для студентів інженерно- технологічного факультету). С. А. Закорчевна, Т. І. Труш. Під ред. В. Є. Березовського. - Умань, КопіЦентр, 2009, 85с.
3. Закорчевна С. А. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Методичні рекомендації для проведення практичних занять та індивідуальні розрахункові завдання (для студентів інженерно-технологічного факультету)// С. А. Закорчевна, Т. І. Труш. Під ред. В. Є. Березовського. – Умань: УНУС, 2011. – 57 с.

Базова література

4. Дубовик В.П. Вища математика: Навч. посібник. / Дубовик В.П., Юрик І.І., - К.: А.С.К., 2005.– 648 с.

5. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, Математичний аналіз: навчальний посібник. / Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С. – Чернівці: Рута, 2007.– 440с.

6. Шкіль М.І., Вища математика: підручник: У 3 кн.: кн. 2. Диференційне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. / Шкіль М.І., Колесник Т.В. - К.: Либідь 1994- 352 с.

7. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике./ Каплан И.А. – Х.: Издательство государственного университета им. А.М. Горького, - 1967. – С. 945.

Інформаційні ресурси

8. http://www.allmath.ru/ - Електронні матеріали з математики.

9. http://www.mathelp.spb.ru/ - Матеріали з вищої математики на допомогу студентам.

10. http://mathem.h1.ru/ - Математика On- Line: довідкова інформація з математичних дисциплін.

Навчальне видання

В. Є. Березовський, Р. В. Ненька, С. А. Закорчевна,
С. В. Лещенко, І. І. Побережець

вища математика

частина І

Навчальний посібник

Підписано до друку 04.09.2018 р. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк.9,53
Тираж 100 прим. Замовлення № 2203

Видавничо-поліграфічний центр «Візаві»
20300, м. Умань, вул. Тищика, 18/19
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 2521 від 08.06.2006.
тел. (04744) 4-64-88, 4-67-77, (067) 104-64-88
vizavi-print.jimdo.com
e-mail: vizavi008@gmail.com